Wrocław, 12 lutego 2015

SKRYPT Z ANALIZY MATEMATYCZNEJ DLA UCZNIÓW XIV LO

MARCIN PREISNER [PREISNER@MATH.UNI.WROC.PL]

Spis treści

WSTĘP

Niniejszy skrypt zawiera materiały dla uczniów XIV LO im. Polonii Belgijskiej we Wrocławiu. Na początku każdego rozdziału znajdują się wiadomości teoretyczne, twierdzenia i przykłady. Potem następują zadania, które podzielone są na: ćwiczenia, zadania i problemy. Duża część zadań pochodzi z list Jarka Wróblewskiego. Skrypt jest w trakcie powstawania. Aktualna wersja znajduje się na stronie:

http://www.math.uni.wroc.pl/~preisner/dyd/analiza2013/analiza2013.php

Oznaczenia. Zbiór liczb naturalnych $\{1,2,3,...\}$ będziemy odznaczali przez $\mathbf{N}$ i będziemy przyjmować, że zero nie jest liczbą naturalną (jest to tylko kwestia konwencji). Liczby całkowite oznaczamy przez $\mathbf{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$, liczby wymierne przez $\mathbf{Q}$, a liczby rzeczywiste przez $\mathbf{R}$. Długie sumy i iloczyny oznaczamy następująco:

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_{n-1} + a_n$$

$$\prod_{i=m}^{n} a_i = a_m \cdot a_{m+1} \cdot a_{m+2} \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \cdot a_n$$

Wybrane oznaczenia:

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0, \end{cases}$$

Zapis $\{x\}$ oznacza część ułamkową liczby x, $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x. Mamy

$$x = [x] + \{x\}.$$

1. INDUKCJA MATEMATYCZNA

1.1. **Wprowadzenie.** Zbiór liczb naturalnych oprócz działań arytmetycznych posiada naturalny *porządek*, tzn. dla każdych dwóch liczb n, m możemy określić, że jedna z nich jest większa od drugiej lub są sobie równe. Porządek ten ma pewną dodatkową własność - każda liczba ma *następującą* i *poprzedzającą* (z wyjątkiem jedynki). Ponadto, zachodzi następujący fakt.

Fakt 1.1
Każdy niepusty zbiór zawarty w zbiorze liczb naturalnych ma element najmniejszy.

Fakt ten jest dla nas bardzo naturalny, ale nie będziemy go uzasadniać tylko potraktujemy jako aksjomat. Przypomnijmy, że *zdaniem logicznym* jest dowolne stwierdzenie mogące być prawdziwe albo nieprawdziwe. Stwierdzenia, które zawierają zmienną, np. T(n): "jest prawdą, że $n \geq 2$"(w skrócie, $T(n): \ n \geq 2$) , stają się zdaniami logicznymi, gdy myślimy o konkretnym $n \in \mathbf{N}$ (w tym wypadku nieprawdziwym dla $n = 1$ i $n = 0$, a prawdziwym w pozostałych przypadkach).

Twierdzenie 1.2 (Zasada Indukcji Matematycznej = ZIM)
Niech $T(n)$ będzie zdaniem logicznym dla $n \in \mathbf{N}$. Załóżmy, że:

- **Z1:** zdanie $T(1)$ jest prawdziwe oraz
- **Z2:** dla dowolnego $k \in \mathbf{N}$ zdanie $T(k)$ implikuje $T(k+1)$,

Wtedy dla dowolnego $n \in Nn$ zdanie $T(n)$ jest prawdziwe.

Przyjrzyjmy się na chwilę istocie tego twierdzenia. Początkowo mamy zdanie logiczne $T(n)$, ale jeszcze nie wiemy, dla których n jest ono prawdziwe, a dla których fałszywe. ZIM mówi nam, że $T(n)$ jest prawdziwe dla wszystkich $n \in Nn$ o ile sprawdzimy założenia **Z1** i **Z2**. Przypomnijmy, że żeby pokazać implikację zakładamy poprzednik implikacji i udowadniamy następnik. I tutaj właśnie kryje się moc indukcji: pokazujemy, że $T(k+1)$ jest prawdziwe zakładając (wiedząc), że zdanie o mniejszym indeksie $T(k)$ jest już prawdziwe. Bez ZIM musielibyśmy bezpośrednio pokazać, że każde ze zdań $T(n)$, $n \in \mathbf{N}$ jest prawdziwe.

Dowód ZIM. Skorzystamy z faktu 1.1. Załóżmy, że **Z1** i **Z2** zachodzą i pokażemy, że $T(n)$ jest prawdziwe dla wszystkich $n \in \mathbf{N}$. Skorzystamy z metody dowodu *nie wprost* [1], czyli **założymy**, że $T(n)$ jest nieprawdziwe dla pewnego (być może wielu) n. Rozważmy następujący podzbiór $\mathbf{N}$:

$$A = \{n \in \mathbf{N} \ : \ T(n) \text{jest zdaniem fałszywym}\}.$$

Teraz, zgodnie założeniem nie wprost, A nie jest zbiorem pustym, więc z faktu 1.1 musi mieć element najmniejszy. Oznaczymy go przez n_0. Jeśli $n_0 = 1$, to mamy sprzeczność z **Z1**. W przeciwnym wypadku T_{n_0} jest fałszywe, ale T_{n_0-1} jest prawdziwe, więc mamy sprzeczność z **Z2** (dla $k = n_0 - 1$ prawda implikuje fałsz). Dostajemy sprzeczność, więc zdanie: "$T(n)$ jest nieprawdziwe dla pewnego (być może wielu) n" okazało się nieprawdziwe, czyli jego zaprzeczenie: "$T(n)$ jest prawdziwe dla wszystkich $n \in \mathbf{N}$" jest prawdziwe. □

1.1.1. *Przykłady.* ZIM mówi o dowolnych zdaniach logicznych numerowanych liczbami naturalnymi, więc można jej używać właściwie w każdej dziedzinie matematyki. Poniższy przykład jest znanym wzorem na sumę ciągu arytmetycznego $1, 2, 3, \ldots, n$.

Przykład 1.3
Dla każdego $n \in \mathbf{N}$ zachodzi:

$$1 + 2 + \ldots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{1.1}$$

Dowód. Niech $T(n)$ oznacza powyższe zdanie dla $n \in \mathbf{N}$. Zgodnie z ZIM musimy sprawdzić:

- **Z1:** Tutaj $T(1)$ oznacza po prostu $1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$, więc $T(1)$ jest prawdziwe.
- **Z2: Zakładamy**, że $T(k)$ jest prawdą, czyli:

$$1 + 2 + \ldots + (k-1) + k = \frac{k(k+1)}{2}. \tag{1.2}$$

Teraz pokażemy $T(k+1)$ korzystając z (1.2). Mamy

$$1 + 2 + \ldots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = (k+1)\left(\frac{k}{2} + 1\right) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

i to jest dokładnie $T(k+1)$.

[1] Metoda *nie wprost* polega na tym, że zamiast pokazać, że zdanie S jest prawdą, myślimy: co by było, gdyby S nie było prawdą. Jeśli okaże się, że zaprzeczenie S prowadzi do sprzeczności (jest nieprawdą), to wyjściowe zdanie S musiało być prawdą. Metoda *nie wprost* często ułatwia dowody, więc w przyszłości często będziemy jej używali.

Używając ZIM (ponieważ **Z1** i **Z2** są spełnione) wzór (1.1) jest prawdziwy dla każdego $n \in \mathbf{N}$.

□

Przykład 1.4
Dla każdego $n \in \mathbf{N}$ liczba $7^n - 1$ jest podzielna przez 6.

Dowód. Zgodnie z ZIM sprawdzamy tylko:

- **Z1:** dla $n = 1$ liczba $7^1 - 1 = 6$ jest podzielna przez 6,
- **Z2:** zakładamy, że dla $k \in \mathbf{N}$ liczba $7^k - 1$ jest podzielna przez 6, czyli istnieje $K \in \mathbf{N}$, takie że $7^k - 1 = 6K$. Wtedy
$$7^{k+1} - 1 = 7^{k+1} - 7^k + 7^k - 1 = 7^k(7-1) + 6K = 6(7^k + K).$$
Ponieważ i ta liczba jest podzielna przez 6, to pokazaliśmy implikację z ZIM.

□

Przykład 1.5
Udowodnij, że n prostych, z których żadne dwie nie są równoległe, a żadne trzy nie przecinają się w jednym punkcie, rozcina płaszczyznę na $\frac{n(n+1)}{2} + 1$ obszarów.

Dowód. Użyjemy ZIM.

- **Z1:** Jedna prosta dzieli płaszczyznę na $2 = \frac{1 \cdot 2}{2} + 1$ obszary.
- **Z2:** Załóżmy, że k prostych jak w zadaniu dzieli płaszczyznę na $\frac{k(k+1)}{2} + 1$ obszarów. Kolejna, $(k+1)$-sza dorysowana prosta przecina wszystkie pozostałe k prostych (i to poza punktami przecięć tych prostych), zatem przecina $k+1$ obszarów na dwie części, więc liczba obszarów zwiększy się o $k+1$ i będzie wynosiła:
$$\frac{k(k+1)}{2} + 1 + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2} + 1.$$

□

1.1.2. *Uwagi i modyfikacje.* Zasadę indukcji matematycznej można modyfikować na wiele sposobów. Może się zdarzyć, że $T(n)$ jest nieprawdziwe dla kilku początkowych n, ale od pewnego n_0 podejrzewamy, że jest już prawdziwe.

Uwaga 1.6
Jeśli pokażemy, że:

- **Z1:** $T(n_0)$ jest prawdziwe,
- **Z2:** $T(k) \implies T(k+1)$ dla $k \geq n_0$,

to ZIM dowodzi, że dla każdego $n \geq n_0$ zdanie $T(n)$ jest prawdziwe.

Podobnie, może się zdarzyć, że nie potrafimy pokazać "kroku"$T(k) \implies T(k+1)$, ale umiemy pokazać większy "krok".

Uwaga 1.7
Jeśli $T(n_0)$ jest prawdą, oraz dla pewnego $r \in \mathbf{N}$ mamy implikację $T(k) \implies T(k+r)$ (dla $k \geq n_0$), to ZIM mówi, że prawdziwe są $T(n_0), T(n_0+r), T(n_0+2r), \ldots$. Ogólnie: $T(n_0 + nr)$ są prawdziwe dla $n \in \mathbf{N}$.

Przykład 1.8
Dowiedź, że dla dowolnej liczby naturalnej $n \geq 6$ kwadrat można podzielić na n kwadratów.

Dowód. Niech $T(n)$ będzie zdaniem: "kwadrat można zbudować z n kwadratów". Zauważmy, że kwadrat można zbudować z 6 kwadratów (jeden o boku 2 i 5 o boku 1), 7 kwadratów (3 o boku 2, 4 o boku 1) i 8 kwadratów (jeden o boku 3 i 7 o boku 1). **Z1:** Zatem $T(6), T(7) i T(8)$ są prawdziwe. Ponadto, jeśli mając dany dowolny podział i jeden z kwadratów podzielimy na 4 mniejsze, to w nowym podziale są o 3 więcej kwadraty. **Z2:** To pokazuje, że $T(k) \implies T(k+3)$ dla dowolnego $k \in \mathbf{N}$. Z pokazanych **Z1** i **Z2** zmodyfikowana ZIM dowodzi, że $T(n)$ jest prawdziwe dla $n \geq 6$. □

Przykład 1.9

Dowiedz, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$1000000n < 2^n + 19000000.$$

Dowód. Powyższa nierówność jest oczywista dla $n = 1, \ldots, 19$. Dla $n = 20$ nierówność jest spełniona ponieważ $1000000 < 2^{20}$ (bo $2^{10} > 1000$). Korzystając z indukcji (sprawdzonej już dla $n = 19$) pokażemy krok indukcyjny $T(k) \implies T(k+1)$ dla $k \geq 19$. Załóżmy, że $1000000k < 2^k + 19000000$. Wtedy

$$1000000(k+1) = 1000000k + 1000000 < 2^k + 19000000 + 1000000 < 2^{k+1} + 19000000,$$

przy czym ostatnia nierówność jest prawdziwa, bo sprawdziliśmy już, że $1000000 < 2^k$ dla $k \geq 20$. □

1.2. **Lista zadań.**

1.2.1. *Ćwiczenia.*

1. Udowodnij wzory:

(a)

$$1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1,$$

(b)

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

2. Udowodnij, że:

(a)

$$5 | n^5 - n,$$

(b)

$$6 | n^3 + 5n.$$

3. Przeprowadź drugi krok indukcyjny w dowodzie wzoru: $n^2 = (n - \frac{1}{2})(n + \frac{1}{2})$.

4. Dla $n > 2$ udowodnij nierówność $2^n > 2n + 1$.

5. Udowodnij indukcyjnie, że każdą kwotę n zł ($n \geq 4$) można rozmienić na dwuzłotówki i pięciozłotówki.

6. Mamy prostokątna czekoladę złożona z $N = ab$(a,b>0) kwadratowych kawałków. Przez wykonanie cięcia (ułamanie czekolady) rozumiemy rozcięcie jej jakiejkolwiek spójnej części wzdłuż którejś z linii pomiędzy kawałkami, tak by dostać dwa znów prostokątne kawałki. Ile razy trzeba ułamać czekoladę aby rozdzielić jej wszystkie kwadraciki?

7. O zdaniu $T(n)$ udowodniono, ze prawdziwe sa $T(1)$ i $T(6)$, oraz ze dla dowolnego $n \geq 1$ zachodzi implikacja $T(n) \implies T(n+3)$. Czy można stad wnioskować, że:

(a) fałszywe jest $T(3)$

(b) fałszywe jest $T(11)$

(c) prawdziwe jest $T(9)$

(d) dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n prawdziwe jest $T(n^2)$

1.2.2. *Zadania.*

1. Udowodnij wzory:

(a)
$$1^3+2^3+\ldots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4},$$
(b)
$$1\cdot 1!+2\cdot 2!+\ldots+n\cdot n!=(n+1)!-1,$$
(c)
$$1+2\cdot 3+3\cdot 3^2+4\cdot 3^3+5\cdot 3^4+\ldots+n\cdot 3^{n-1}=\frac{2n-1}{4}\cdot 3^n+\frac{1}{4},$$
(d)
$$(2^{2^0}+1)\cdot(2^{2^1}+1)\cdot(2^{2^2}+2)\cdot(2^{2^3}+1)\cdot\ldots\cdot(2^{2^n}+1)=2^{2^{n+1}}-1.$$

2. Policz poniższe wyrażenie dla $n=1,2,3,4,5$, zgadnij wartość dla dowolnego n i udowodnij indukcyjnie, że to prawdziwa wartość.
$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}$$

3. Udowodnij następujące nierówności:

(a) dla $n\in\mathbf{N}$,
$$n(n+1)\le 2^n+4,$$
(b) dla $n\in\mathbf{N}$,
$$10n<2^n+25,$$
(c) dla $x>-1$, $n\in\mathbf{N}$ (nierówność Bernoulliego):
$$(1+x)^n\ge 1+nx,$$
(d) dla $n>1$,
$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n},$$
(e) dla $n>3$,
$$(n+1)^n<n^{n+1},$$

4. Uzasadnij podzielności:

(a) $19|(5\cdot 2^{3n-2}+3^{3n-1})$,

(b) $133|11^{n+1}+12^{2n-1}$.

5. Pokaż indukcyjnie, że zbiór, który ma n elementów, ma dokładnie 2^n podzbiorów.

6. Udowodnij przez indukcję, że liczba przekątnych w n-kąta wypukłego jest równa $\frac{1}{2}n(n-3)$

7. Dowiedź, ze dla każdej liczby naturalnej $n\ge 200$ sześcian można podzielić na n sześcianów.

8. Dowiedź, że dla każdej liczby naturalnej $n\ge 2$ zachodzi równość
$$\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{60}+\ldots+\frac{1}{(n-1)\cdot n\cdot(n+1)}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2n(n+1)}\ .$$

9. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej $n \geq 2$ zachodzi równość

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\frac{1}{24}+\ldots+\frac{1}{n^2-1}=\frac{(n-1)(3n+2)}{4n(n+1)}.$$

10. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\sum_{i=1}^{n} i^5 < \frac{n^3(n+1)^3}{6}.$$

11. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi

$$9\cdot(3n)!\cdot n \ldots\ldots\ldots\ldots 2\cdot\left(3^n\cdot n!\right)^3.$$

W miejsce kropek wstawić jeden ze znaków: $>, <, =, \geq, \leq$.

12. Ciąg a_n zadany jest rekurencyjnie:

$$a_0=-1, \quad a_1=0, \qquad a_{n+1}=5a_n-6a_{n-1} \text{ dla } n\geq 1.$$

Udowodnij, że $a_n=2\cdot 3^n-3\cdot 2^n$.

13. Ciąg a_n zadany jest rekurencyjnie:

$$a_0=0, \ \ a_1=1, \ \ a_{n+1}=3a_n-2a_{n-1}.$$

Policz kilka początkowych wyrazów tego ciągu, zgadnij wzór na n-ty wyraz, a następnie udowodnij ten wzór używając indukcji.

14. Liczby a_n, b_n sa określone wzorami

$$a_1=b_1=1, a_{n+1}=a_n+b_n, b_{n+1}=a_{n+1}+a_n.$$

Dowiedź, że dla dowolnej liczby naturalnej n liczba $2a_n^2-b_n^2$ jest równa ± 1.

15. Znajdź błąd w w następującym dowodzie: wykaż, że dla $n\in\mathbf{N}$ zachodzi nierówność

$$30n<2^n+110. \tag{1.3}$$

Dowód. Przeprowadzimy dowód indukcyjny. Dla $n=1$ sprawdzamy bezpośrednio $30<2+110=112$. Załóżmy, że $30k<2^k+110$. Udowodnimy nierówność $30(k+1)<2^{k+1}+110$. Stosując założenie indukcyjne otrzymujemy ciąg nierówności:

$$30(k+1)=30k+30<2^k+110+30=2^{k+1}+110+30-2^k<2^{k+1}+110,$$

przy czym ostatnia nierówność zachodzi dla $k\geq 5$. Zatem nierówność (1.3) została udowodniona dla $n\geq 5$. Pozostaje sprawdzić, że: dla $n=2$ mamy $60<4+110=114$, dla $n=3$ mamy $90<8+110=118$, dla $n=4$ mamy $120<16+110=126$. Tym samym nierówność (1.3) jest udowodniona dla wszystkich W szczególności wykazaliśmy, ze dla $n=6$ zachodzi nierówność $180<174$. Gdzie tkwi błąd w powyższym rozumowaniu? □

16. Wskaż błąd w dowodzie twierdzenia: wszystkie koty są tego samego koloru.

Dowód. Wystarczy wykazać, że w dowolnym zbiorze zawierającym n kotów, gdzie $n\in\mathbf{N}$, wszystkie koty są tego samego koloru.

- **Z1** Warunek początkowy, to sprawdzenie dla $n=1$. Oczywiście w zbiorze zawierającym tylko jednego kota wszystkie koty są tego samego koloru.
- **Z2:** Załóżmy, że udowodniliśmy twierdzenie dla wszystkich liczb naturalnych od 1 do $n-1$, dowodzimy dla n. Weźmy dowolny zbiór A zawierający n kotów. Pokażemy, że koty ze zbioru A są tego samego koloru. Wrzucając z A pewnego kota X otrzymamy zbiór zawierający $n-1$ kotów - możemy skorzystać z założenia indukcyjnego, żeby stwierdzić, że wszystkie koty w A oprócz X mają ten sam kolor. Ale teraz, wrzucając z A kota Y (innego niż X), wnioskujemy z założenia indukcyjnego, że kot

X ma ten sam kolor, co pozostałe koty w A. Wobec tego wszystkie koty w A mają ten sam kolor.

Zatem na mocy zasady indukcji matematycznej wszystkie koty są tego samego koloru. □

17. *Dygresja:* wymyśl na nowo wzór na wyrażenie z zadania 2 zadania korzystając z równości: $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$. Potem podobnie policz sumę:

$$\frac{1}{2\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 8} + \ldots + \frac{1}{(3n-1)\cdot(3n+2)}.$$

18. Załóżmy, że $x + \frac{1}{x}$ jest liczbą całkowitą. Udowodnij, że $x^n + \frac{1}{x^n}$ jest liczbą całkowitą dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

19. Pokaż, że dla liczb rzeczywistych $x_1, \ldots, x_n$ zachodzi:

(a) $|x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2|$,

(b) $|x_1 + x_2 + \ldots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \ldots |x_n|$.

20. O zdaniu $T(n)$ udowodniono, że prawdziwe jest $T(1)$, oraz ze dla dowolnego $n \geq 6$ zachodzi implikacja $T(n) \implies T(n+2)$. Czy można stąd wnioskować, że:

(a) prawdziwe jest $T(10)$

(b) prawdziwe jest $T(11)$

(c) prawdziwa jest implikacja $T(7) \implies T(13)$

(d) prawdziwa jest implikacja $T(3) \implies T(1)$

(e) prawdziwa jest implikacja $T(1) \implies T(3)$

21. O zdaniu $T(n)$ wiadomo, że $T(7)$ jest fałszywe, $T(17)$ jest prawdziwe, a ponadto dla każdej liczby naturalnej n zachodzi implikacja $T(n) \implies T(n+1)$. Czy stad wynika, że:

(a) $T(5)$ jest fałszywe

(b) $T(10)$ jest prawdziwe

(c) $T(15)$ jest fałszywe

(d) $T(20)$ jest prawdziwe

22. O zdaniu $T(n)$ wiadomo, że prawdziwe jest $T(25)$, a ponadto dla każdej liczby naturalnej $n \geq 20$ zachodzi implikacja $T(n) \implies T(n+2)$ oraz dla każdej liczby naturalnej $4 \leq n \leq 30$ zachodzi implikacja $T(n) \implies T(n-3)$. Czy stad wynika, że prawdziwe jest:

(a) $T(37)$

(b) $T(38)$

(c) $T(10)$

(d) $T(11)$

1.2.3. *Problemy.*

1. Udowodnij, że dla każdego $n \in \mathbf{N}$ liczba $(n-1)^2$ jest dzielnikiem liczby $n^n - n^2 + n - 1$.

2. Ciąg Fibbonacciego f_n zadany jest rekurencyjnie: $f_0 = 1$, $f_1 = 1$, $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ dla $n \geq 1$. Udowodnij, że

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right).$$

3. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich $a_1, a_2, \ldots, a_n$ zachodzi nierówność

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$$

wedle następującego planu:

(a) udowodnij ją dla $n=2$,

(b) udowodnij, że jeśli jest ona prawdziwa dla $n=k$, to jest też prawdziwa dla $n=2k$,

(c) udowodnij, że jeśli $k<\ell$ i nierówność jest prawdziwa dla $n=\ell$ to jest też prawdziwa dla $n=k$,

(d) wyciągnij konkluzję.

4. Dane są klocki o kształcie sześcianu o wymiarach $2\times2\times2$ z usuniętym narożnikiem $1\times1\times1$. Używając tych klocków zbuduj sześcian o wymiarach $2^n\times2^n\times2^n$ z usuniętym narożnikiem $1\times1\times1$.

5. Boki pewnego wielokąta wypukłego zaznaczono z zewnątrz cienką kolorową linią. W wielokącie zaznaczono kilka przekątnych i każdą z nich - również z jednej strony - zaznaczono cienką kolorową linią. Wykaż, że wśród wielokątów, na które narysowane przekątne dzielą wyjściowy wielokąt, istnieje taki, którego wszystkie boki są zaznaczone z zewnątrz.

6. Dana jest liczba naturalna k. Dowiedź, że z każdego zbioru liczb całkowitych, mających więcej niż 3^k elementów możemy wybrać $(k+1)$-elementowy podzbiór S o następującej własności:

Dla dowolnych dwóch różnych od siebie podzbiorów $A,B\subset S$ suma wszystkich elementów z A jest rożna od sumy wszystkich elementów z B.

7. Udowodnij, że dla różnych liczb całkowitych a,b,c i dowolnej liczby naturalnej n poniższa liczba jest całkowita:

$$\frac{a^n}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^n}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^n}{(c-a)(c-b)}.$$

8. Niech $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ będzie ciągiem dodatnich liczb rzeczywistych takich, że $a_1=\frac{1}{2}$ oraz $a_n^2\leq a_n-a_{n+1}$. Udowodnij, że $a_n<\frac{1}{n}$ dla każdego $n\in\mathbf{N}$.

9. Na pustyni na drodze w kształcie okręgu jest pewna liczba stacji benzynowych, a na każdej pewna ilość paliwa. Wiadomo, że paliwa na wszystkich stacjach łącznie wystarcza do przejechania drogi naokoło. Udowodnij, że istnieje stacja, taka że samochód startujący z tej stacji jadąc w wybraną stronę przejedzie całą drogę naokoło.

2. SYMBOL NEWTONA

2.1. **Wprowadzenie.** Przypomnijmy, że $n!$ oznacza w skrócie iloczyn $1\cdot2\cdot\ldots\cdot n$ oraz $0!=1$. Mamy dane dwie liczby: $n\in\mathbf{N}$ oraz $k\in\{0,1,\ldots,n\}$. Symbolem Newtona nazywamy liczbę daną wzorem:

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} \tag{2.1}$$

Jest jasne, że $\binom{n}{k}$ (czytamy: "n nad k") jest zawsze liczbą wymierną. Okazuje się jednak, że są one zawsze naturalne i mają ważne znaczenie w algebrze i kombinatoryce. Zanim jednak to zobaczymy przyjrzymy się własnościom tych liczb. Poniżej mamy wypisane liczby $\binom{n}{k}$ dla $n=0,1,2,3,4,5$ i $k\in\{0,\ldots,n\}$.

$\binom{0}{0}$							1					
$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$						1	1				
$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$					1	2	1			
$\binom{3}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{3}$				1	3	3	1		
$\binom{4}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{4}$			1	4	6	4	1	
$\binom{5}{0}$	$\binom{5}{1}$	$\binom{5}{2}$	$\binom{5}{3}$	$\binom{5}{4}$	$\binom{5}{5}$		1	5	10	10	5	1

Można łatwo sprawdzić, że zawsze $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ oraz $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$. Ponadto: (prawie) każda z nich jest sumą dwóch "ponad nią". Jest to kluczowa obserwacja, którą później wykorzystamy.

Fakt 2.1

Dla $n \in \mathbf{N}$ oraz $k \in \{1,\dots,n\}$ mamy

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}. \tag{2.2}$$

Dowód. Obliczymy prawą stronę równości (2.2).

$$\begin{aligned}(P) &= \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k}\right)\\ &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!}\,\frac{n}{k(n-k)} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.\end{aligned}$$

□

Następujące twierdzenie jest uogólnieniem wzorów skróconego mnożenia: $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$, $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ w którym symbol Newtona gra kluczową rolę.

Twierdzenie 2.2 (Wzór dwumianowy Newtona)

Dla $a, b \in \mathbf{R}$ oraz $n \in \mathbf{N}$ zachodzi

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}. \tag{2.3}$$

Dowód. Skorzystamy z ZIM.

- **Z1:** Dla $n = 1$ obie strony są równe $a+b$.
- **Z2:** Załóżmy, że wzór zachodzi dla wszystkich $a, b \in \mathbf{R}$ i pewnego n.

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= (a+b)\cdot(a+b)^n = (a+b)\cdot\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k+1} = (\clubsuit).\end{aligned}$$

Teraz wystarczy uważnie przyjrzeć się wyrażeniom występującym w oby sumach. Przy wyrażeniu $a^j b^{n+1-j}$ (dla $j \in \{1,\dots,n\}$) w pierwszej sumie mamy współczynnik $\binom{n}{j-1}$ a w drugiej $\binom{n}{j}$. Poza tym, z w pierwszej sumie jest jeszcze składnik a^{n+1} a w drugiej b^{n+1}. Korzystając z (2.2) otrzymujemy:

$$(\clubsuit) = \binom{n+1}{0}a^{n+1} + \sum_{j=1}^{n}\left(\binom{n}{j-1} + \binom{n}{j}\right)a^j b^{n+1-j} + \binom{n+1}{n+1}b^{n+1} = \sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j}a^j b^{n+1-j},$$

co chcieliśmy otrzymać.

□

Dla kilku pierwszych n wzór (2.3) wygląda następująco:

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2, \quad (a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3, \quad (a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4.$$

Kolejne twierdzenie pokazuje, że symbol Newtona ma również naturalne znaczenie kombinatoryczne. W przyszłości będziemy czasem wykorzystywać ten dualizm zmieniając problemy algebraiczne na kombinatoryczne i odwrotnie.

Twierdzenie 2.3
Niech zbiór X ma dokładnie n elementów. Dla $k \in \{0,1,\dots,n\}$ liczba podzbiorów zbioru X mających dokładnie k elementów wynosi $\binom{n}{k}$.

Dowód. Twierdzenie 2.3 można wyprowadzić z twierdzenia 2.2 i to będzie treścią problemu 1. Tutaj podamy bezpośredni dowód indukcyjny (po zmiennej n)[2].

- **Z1:** Dla $n = 1$ są dwie możliwości: jest jeden podzbiór jednoelementowy i jeden podzbiór pusty. Równocześnie $\binom{1}{0} = \binom{1}{1} = 1$.
- **Z2:** Zakładamy, że dla pewnego $n \in \mathbf{N}$ i **wszystkich** $k \in \{0,\dots,n\}$ twierdzenie zachodzi. Rozważamy podzbiory j elementowe zbioru $n+1$ elementowego (dla $j \in \{0,\dots,n+1\}$). Gdy $j = 0$ lub $j = n+1$ mamy jeden podzbiór i twierdzenie się zgadza. Rozważmy $j \in \{1,\dots,n\}$. Wybierzmy jeden ustalony element x zbioru X na bok. Policzymy podzbiory j-elementowe zbioru X dzieląc je na dwie (rozłączne) części: zawierające x i nie zawierające x. Tych pierwszych jest $\binom{n}{j-1}$ (bo z pozostałych n elementów dobieramy do x dokładnie $j-1$), a tych drugich $\binom{n}{j}$ (skoro x nie należy do podzbioru, to z pozostałych n wybieramy dokładnie j). Zgodnie ze wzorem (2.2) suma tych dwóch liczb wynosi $\binom{n+1}{j}$, co mieliśmy udowodnić.

$\square$

Zauważmy, że z twierdzenia 2.3 wynika, że wszystkie liczby $\binom{n}{k}$ są całkowite, co nie było wcale jasne z definicji (2.1). Można to jednak pokazać bezpośrednio, zobacz problem 2.

2.1.1. *Uwagi.*

Uwaga 2.4
Niech $n, k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, $k \le n$. Wtedy:

1.
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k},$$

2. dla $0 \le k_1 < k_2 \le [n/2]$ zachodzi
$$\binom{n}{k_1} < \binom{n}{k_2}.$$

Dowód. Wzór **1.** wynika wprost z definicji (2.1) (sprawdź). Alternatywnie, z twierdzenia 2.3, możemy go uzasadnić następująco: gdy zbiór X ma n elementów, to jest tyle samo podzbiorów k-elementowych i $n-k$ elementowych ponieważ każdemu zbiorowi k-elementowemu odpowiada dokładnie jedno $n-k$-elementowe dopełnienie.

[2] W tym twierdzeniu występują dwie zmienne n i k. Przeprowadzając dowód indukcyjny po zmiennej n mamy na myśli zdania $T(n)$: "twierdzenie zachodzi dla n i wszystkich możliwych k".

Aby udowodnić **2.** wystarczy pokazać, że $\binom{n}{k-1} < \binom{n}{k}$ dla $1 \le k \le [n/2]$ (zauważ, że to wystarczy). Wystarczy sprawdzić, że

$$\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} < \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

co po uproszczeniu sprowadza się do

$$k < n-k+1,$$

a to jest prawdziwe dla powyższych k. □

2.1.2. *Przykłady.* Jako wprowadzenie do metod kombinatorycznych wykorzystywanych w algebrze podamy teraz inny dowód faktu 2.1.

Dowód. Niech X będzie ustalonym zbiorem n-elementowym. Lewą stronę (2.2) możemy interpretować jako liczbę podzbiorów k-elementowych zbioru X. Policzmy tę liczbę inaczej: ustalmy element $x \in X$ i policzmy zbiory zawierające x oraz nie zawierające X, które mają k elementów. Pierwszych jest $\binom{n-1}{k-1}$ a drugich $\binom{n-1}{k}$, co po dodaniu daje prawą stronę (2.2). □

Przykład 2.5

Dla $n, k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, $k \le n$, zachodzi

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Dowód. Powyższy wzór udowodnimy przez znalezienie interpretacji kombinatorycznej, która odczytana na dwa sposoby da obie strony równania. Zauważmy najpierw, że

$$\binom{n}{k}^2 = \binom{n}{k} \cdot \binom{n}{n-k}.$$

Załóżmy, że mamy zbiór X, który ma $2n$ elementów. Prawa strona to oczywiście liczba wyborów połowy elementów ze zbioru X. Podzielmy zbiór X na dwa równoliczne zbiory X_1 i X_2. Żeby wybrać n elementów ze zbioru X wybieramy k elementów ze zbioru X_1 oraz $n-k$ ze zbioru X_2. Postępując tak dla $k = 0, 1, \ldots, n$ dostajemy wszystkie wybory n elementów z X (sprawdź, że to wszystkie i każdy uwzględniliśmy). □

2.2. **Lista zadań.**

2.2.1. *Ćwiczenia.*

1. Oblicz ile jest podzbiorów 4-elementowych zbioru 6-elementowego.
2. Policz potęgi: $(x+1)^2$, $(x+1)^3$, $(x+1)^4$, $(x+1)^5$.
3. Policz ile jest podzbiorów $0, 1, 2, 3, 4$-elementowych zbioru $\{1, 2, 3, 4\}$.
4. Znajdź wyraz rozwinięcia dwumianu $\left(\sqrt[3]{x} + \frac{2}{x}\right)^{12}$ w którym nie występuje x.
5. Wyznacz współczynnik przy x^7 w wielomianie $(5-2x)^{10}$.
6. Uporządkuj rosnąco następujące liczby:

$$\binom{100}{7}, \binom{100}{27}, \binom{100}{47}, \binom{100}{57}, \binom{100}{77}, \binom{100}{97}.$$

2.2.2. *Zadania.*

1. Znajdź te wyrazy rozwinięcia dwumianu $(\sqrt[3]{3}+\sqrt{2})^5$, które są liczbami naturalnymi.

2. Rozwiąż równanie $\binom{n}{2}=66$.

3. Uzasadnij (można to zrobić na co najmniej trzy sposoby), że

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}=2^n.$$

4. Policz sumy:

(a)

$$\binom{n}{0}\cdot 2^0+\binom{n}{1}\cdot 2^1+\binom{n}{2}\cdot 2^2+\ldots+\binom{n}{n-1}\cdot 2^{n-1}+\binom{n}{n}\cdot 2^n,$$

(b)

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\ldots+(-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}+(-1)^n\binom{n}{n}$$

5. Wyznacz liczby całkowite n,m, wiedząc że $m-n\sqrt{3}=(3-\sqrt{3})^5$.

6. Dowiedź, że dla każdej liczby naturalnej $n\geq 2$ zachodzi nierówność $\binom{2n}{n}<4^n$.

Wskazówka: $(1+1)^{2n}$

7. Wskaż taką liczbę x, że dla dowolnych liczb naturalnych n i k prawdziwa jest równość

$$\binom{n}{k}+x\binom{n}{k+1}+\binom{n}{k+2}=\binom{n+2}{k+2}.$$

8. Rozwiąż równanie

$$3\cdot\binom{n}{4}=\binom{k}{2}$$

w liczbach naturalnych $n\geq 4$, $k\geq 2$.

9. Dowiedz, że dla dowolnych liczb całkowitych nieujemnych a,b,c zachodzi równość

$$\binom{a+b+c}{a}\binom{b+c}{b}=\binom{a+b+c}{b}\binom{a+c}{a}.$$

10. Dowiedz, że dla każdego $n\geq 2$ zachodzi równość

$$\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+\ldots+\binom{n}{2}=\binom{n+1}{3}.$$

11. Dowiedz, że dla każdego $n\geq 2$ zachodzi równość

$$\binom{2}{2}\cdot\binom{3}{2}\cdot\binom{4}{2}\cdot\ldots\cdot\binom{n}{2}=\frac{n\cdot[(n-1)!]^2}{2^{n-1}}.$$

12. Dowiedz, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $\binom{3n}{n}<7^n$.

13. Dowiedz, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $\binom{2n+3}{n}<\frac{3}{2}\cdot 4^n$.

14. Dowiedz, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\binom{2n+4}{n}<2^{2n+1}.$$

15. Czy równość $2\cdot\binom{n}{k}=\binom{n}{k+1}$ jest prawdziwa dla

a) $n=8,\ k=2$ **b)** $n=10,\ k=3$ **c)** $n=15,\ k=4$ **d)** $n=17,\ k=5$

2.2.3. *Problemy.*

1. Korzystając z prawa mnożenia nawiasów "każdy z każdym" wywnioskuj ze wzoru (2.3), że współczynnik przy $a^k b^{n-k}$ w wyrażeniu $(a+b)^n$ musi wynosić dokładnie tyle co liczba podzbiorów k-elementowych zbioru n-elementowego.
2. Niech $n, k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, $k \leq n$ oraz p będzie liczbą pierwszą. Policz przez jaką maksymalną potęgę liczby pierwszej p dzieli się $n!$. Zrób to samo dla k i $n-k$ zamiast n. Wywnioskuj z tego, że $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ jest liczbą całkowitą (bez odwoływania się do interpretacji kombinatorycznej).
3. Dowiedź, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność
$$16^n \cdot \binom{4n}{2n} < 27^n \cdot \binom{4n}{n}.$$
4. Przy odpowiednich założeniach na n, k (takich, że wszystkie symbole istnieją), udowodnij wzory:

(a)
$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1},$$
(b)
$$\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k},$$
(c)
$$\sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1},$$
(d)
$$\sum_{k=0}^{n} 2^{n-k}\binom{n+k}{k} = \frac{1}{2}2^{2n+1} = 4^n,$$
(e)
$$\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k}^2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n+k}{k},$$
(f)
$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1},$$
(g)
$$\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2},$$
(h)
$$\sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2},$$
(i)
$$\sum_{k=0}^{n} 2^k\binom{2n-k}{n} = 4^n,$$

5. Dowiedź, że istnieje taka liczba całkowita, $n > 2003$, że w ciągu:
$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{2003},$$
każdy wyraz jest dzielnikiem wszystkich wyrazów po nim następujących.

3. LICZBY WYMIERNE I NIEWYMIERNE

3.1. **Wprowadzenie.** Liczby naturalne, całkowite i wymierne (jak również działania w tych zbiorach) są zdefiniowane bardzo naturalnie. Przypomnijmy tylko, że liczby wymierne to liczby, które można zapisać w postaci $\frac{p}{q}$, gdzie $p \in \mathbf{Z}$ oraz $q \in \mathbf{N}$, oraz że takich zapisów dla każdej liczby wymiernej jest nieskończenie wiele.

Aby dokładnie poznać liczby rzeczywiste, a co za tym idzie - niewymierne $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, musimy ustalić czym dokładnie taka liczba rzeczywista jest. Zaczniemy od ważnego przykładu.

Przykład 3.1
Liczba $0,999... = 0,(9)$ jest wymierna i wynosi dokładnie 1.

Dowód. Oznaczmy $x = 0,(9)$. Wtedy $10x = 9,(9)$ oraz $10x - x = 9$. Zatem $x = 1$. □

Można powiedzieć, że powyższy przykład jest trochę "oszukany", bo nie powiedzieliśmy jeszcze dokładnie czym są liczby rzeczywiste, skąd więc możemy wiedzieć, że liczba $0,(9)$ istnieje i jak zdefiniować na niej działania. Okaże się jednak, że to wszystko miało prawdziwy sens. Zauważmy jednak, że trzeba do tego typu trików podchodzić ostrożnie - rozważmy $y = 1+3+9+27+81+243+\ldots$. Wówczas $y = 1+3\cdot1+3\cdot3+3\cdot9+3\cdot27+3\cdot81+3\cdot243+\ldots = 1+3\cdot(1+3+9+27+81+243+\ldots) = 1+3y$, skąd $y = -1/2$. Jak to możliwe, że suma liczb całkowitych dodatnich jest ujemna i niecałkowita? Nie jest to możliwe, bo okaże się, że y nie jest liczbą rzeczywistą.

Istnieje kilka podejść do "konstrukcji" liczb rzeczywistych z liczb wymiernych. Ponieważ są one dość "techniczne", nasza definicja zbioru $\mathbf{R}$ będzie następująca.

Definicja 3.2
Liczbą rzeczywistą nazywamy dowolne rozwinięcie dziesiętne

$$a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0, a_{-1} a_{-2} \ldots,$$

gdzie $n \in \mathbf{N}$.

W powyższym przedstawieniu a_2 jest po prostu liczbą setek (jeśli występuje), a a_{-1} pierwszą liczbą po przecinku.

Uwaga 3.3
Ponieważ widzieliśmy, że $1,000... = 0,999...$, więc pewne, formalnie różne, przedstawienia liczb w postaci zapisu dziesiętnego dają tę samą liczbę. Musimy więc dodać, że każda liczba, która kończy się nieskończoną liczbą dziewiątek (np. 12345,678(9)) oraz liczba powiększoną o 1 na pierwszym miejscu przed dziewiątkami i mającą nieskończenie wiele zer na dalej (tutaj: 12345,679) są tą samą liczbą. Wśród pozostałych liczb już nie ma takiego problemu.

Tak zdefiniowany zbiór $\mathbf{R}$ ma wszystkie pożądane własności. Można wykonywać wszystkie działania arytmetyczne, występuje naturalny porządek (wiemy która z dwóch różnych liczb rzeczywistych jest większa), zachodzą prawa rozdzielności, itd. Nie będziemy tutaj wnikać w omawianie wszystkich szczegółów.

3.1.1. *Uwagi.* Przyjrzyjmy się podziałowi $\mathbf{R}$ na $\mathbf{Q}$ (wymierne) i $\mathbf{IQ} = \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ (niewymierne).

Fakt 3.4
Liczby rzeczywiste wymierne, to dokładnie te, które mają postać dziesiętną skończoną lub okresową.

Dowód. Jeśli liczba jest wymierna, to jest postaci $\frac{p}{q}$, $p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{N}$, i z algorytmu dzielenia z resztą wynika, że przyjmuje postać dziesiętną skończoną ("dzielenie się kończy") lub okresową ("dzielenie się zapętla").

Odwrotnie, gdy liczba rzeczywista x ma postać skończoną, to jest postaci $x = \frac{n}{10^N}$, czyli jest wymierna. Jeśli natomiast x ma okres długości N, to $10^N x - x = 99...99x$ jest liczbą o rozwinięciu skończonym, czyli $99...99x$ jest wymierna i wtedy x również jest wymierna. □

Ważnym faktem jest tzw. "gęstość" liczb wymiernych (lub niewymiernych) w zbiorze liczb rzeczywistych. Ten fakt można zapisać następująco.

Fakt 3.5
W dowolnym przedziale (a,b) na prostej rzeczywistej ($a < b$) znajduje się zarówno liczba wymierna, jak i niewymierna.

Dowód. Niech $d = b - a$ będzie długością przedziału (a,b). Rozważmy środek przedziału $c = (a+b)/2$. Mamy dwa przypadki:

- jeśli c jest wymierne, to $x = c + \frac{\sqrt{2}}{2^N}$ jest niewymierne (patrz ćwiczenie 5) oraz dla N tak dużego, że $\frac{\sqrt{2}}{2^N} < d/2$ liczba x należy do przedziału (a,b),
- jeśli c jest niewymierne, to ucinając zapis dziesiętny liczby c od miejsca N zmieniamy c w liczbę wymierną i zmieniamy ją o najwyżej 10^{-N+1}. Biorąc N tak duże, że $10^{-N+1} < d/2$ dostajemy w ten sposób liczbę wymierną, która jest w przedziale (a,b).

□

Konsekwencją tego faktu jest ważna własność: dowolnie blisko każdej liczby rzeczywistej x leżą zarówno liczby wymierne jak i niewymierne. Aby to zobaczyć wystarczy zastosować fakt 3.5 do przedziałów $(x - 10^{-n}, x + 10^{-n})$.

3.1.2. *Przykłady.*

Przykład 3.6
Liczba $123,43434343...$ jest równa $\frac{12220}{99}$.

Dowód. Niech x oznacza liczbę rzeczywistą $123,(43)$. Wtedy $100x = 12343,(43)$ i odejmując stronami dostajemy $99x = 12220$, a więc $x = \frac{12220}{99}$. □

Przykład 3.7
Liczba $\sqrt{2}$ jest niewymierna, tzn. nie istnieje liczba wymierna, której kwadrat wynosi 2.

Dowód. Skorzystamy z metody "nie wprost". Gdyby $\sqrt{2}$ był wymierny, to istniałyby $p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{N}$ takie, że $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, albo inaczej $2 = \frac{p^2}{q^2}$. Dodatkowo możemy założyć, że p i q nie mają wspólnych dzielników pierwszych, czyli "postać $\frac{p}{q}$ jest nieskracalna". Po pomnożeniu przez q^2 dostajemy $2q^2 = p^2$ z czego wynika, że p musi być liczbą parzystą. Niech $p = 2r$. Wtedy $2q^2 = 4r^2$, czyli $q^2 = 2r^2$, z czego z kolei wynika, że q jest liczbą parzystą. Ponieważ 2 jest dzielnikiem zarówno p jak i q dochodzimy do sprzeczności co kończy dowód nie wprost. □

Przykład 3.8
Liczba $\log_2 3$ jest niewymierna.

Dowód. Przeprowadzimy kolejny dowód nie wprost[3]. Załóżmy, że liczba $\log_2 3$ jest wymierna i niech m/n będzie jej przedstawieniem w postaci ilorazu liczb naturalnych, $n, m \in \mathbf{N}$. Wówczas $\log_2 3 = \frac{m}{n}$ jest równoważne równaniu

$$2^{m/n} = 3,$$

a to oznacza, że $2^m = 3^n$. Ta ostatnia równość nie jest jednak możliwa, gdyż liczba 2^m jest parzysta, a liczba 3^n nieparzysta. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że liczba $\log_2 3$ nie jest liczbą wymierną. □

Przykład 3.9
Liczba $\sqrt{5} + \sqrt[3]{2}$ jest niewymierna.

Dowód. Niewymierność liczby $\sqrt{5} + \sqrt[3]{2}$ będzie wynikała z niewymierności liczby $\sqrt{5}$ (patrz przykład 3.7 oraz zadanie 3). Załóżmy nie wprost, że istnieje $r \in \mathbf{Q}$ takie, że $\sqrt{5} + \sqrt[3]{2} = r$. Przekształcając,

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{2} &= r - \sqrt{5} && /(...)^3 \\
2 &= r^3 - 3r^2\sqrt{5} + 3r \cdot 5 - 5\sqrt{5} && /\text{wyznaczamy } \sqrt{5} \\
\sqrt{5} &= \frac{r^3 + 15r - 2}{3r^2 + 5}
\end{aligned}$$

□

3.2. **Lista zadań.**

3.2.1. *Ćwiczenia.*

1. Zamień liczby w postaci ułamkowej na postać dziesiętną i odwrotnie:
   (a) $\frac{3}{7}$, $\frac{31}{70}$, $\frac{4}{17}$, $\frac{17}{101}$,
   (b) $0,125$, $0,123(45)$, $0,(271)$, $4,23(45)$, $0,1(270)$.
2. Zapisz liczby w postaci nieskracalnej, a potem dziesiętnej:
$$\frac{2^{13}5^4 7^3}{2^9 5^5 7^2}, \quad \frac{21^4 10^2}{5^3 7^4}.$$
3. Pokaż, że następujące liczby są niewymierne:
$$\sqrt{7}, \quad \sqrt{15}, \quad \sqrt[3]{3}, \quad \sqrt{2} + \sqrt{3}.$$
4. Pokaż, że liczba $\log_3 11$ jest niewymierna.
5. Pokaż, że suma liczby wymiernej i niewymiernej jest niewymierna. Czy suma dwóch liczb niewymiernych musi być niewymierna?

[3] bo jak inaczej pokazać, że coś "nie jest"?

3.2.2. *Zadania.*

1. Oblicz podając wynik w postaci ułamka zwykłego
(a) $\sqrt{0,(4)}+\sqrt[3]{3,374(9)}$
(b) $(0,2(9)+1,(09))\cdot 12,(2)$
(c) $(0,(037))^{0,(3)}$

2. Dowiedź, że liczba $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$ jest niewymierna.

3. Dla jakich $n\in\mathbf{N}$ liczba $\sqrt{n}$ jest wymierna?

4. Dowiedź, że liczba $\sqrt{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$ jest niewymierna.

5. Pokaż, że liczba $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ jest niewymierna.

6. Dowiedź, że liczba $\log_{12}18$ jest niewymierna.

7. Dowiedź, że liczba $\sqrt{\log_4 25}$ jest niewymierna.

8. Dla liczby wymiernej dodatniej $q=m/n$, gdzie $m,n\in\mathbf{N}$, zapisz warunek $\log_2 3<q$. Wykorzystaj ten warunek do porównania $\log_2 3$ z liczbami 3/2, 5/3 oraz 8/5.

9. Rozstrzygnij, czy liczba $\log_2 3+\log_4 5$ jest wymierna, czy niewymierna.

10. Pokaż błędy w poniższych rozwiązaniach zadania: pokaż, że liczba $\sqrt{3-\sqrt{8}}-\sqrt{2}$ jest niewymierna.
Rozwiązanie I: Liczba $-\sqrt{2}$ jest niewymierna. Także liczba $\sqrt{3-\sqrt{8}}$ jest niewymierna, bo gdyby była wymierna, to jej kwadrat $3-\sqrt{8}$ też byłby liczbą wymierną, a nie jest. Zatem liczba $\sqrt{3-\sqrt{8}}-\sqrt{2}$ jest niewymierna jako suma liczb niewymiernych.
Rozwiązanie II: Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że liczba $\sqrt{3-\sqrt{8}}-\sqrt{2}$ jest wymierna i oznaczmy ją przez w. Wtedy

$$w=\sqrt{3-\sqrt{8}}-\sqrt{2}$$

$$w+\sqrt{2}=\sqrt{3-\sqrt{8}}$$

$$w^2+2\sqrt{2}w+2=3-2\sqrt{2}$$

$$2\sqrt{2}(w+1)+(w-1)(w+1)=0$$

Dzieląc ostatnią równość przez $w+1$ otrzymujemy

$$2\sqrt{2}+w-1=0,$$

co stanowi sprzeczność z założeniem wymierności liczby w, gdyż lewa strona równości jest liczbą niewymierną i nie może być równa 0.

11. Niech n będzie liczbą naturalną. Mając do dyspozycji nawiasy, n, liczby całkowite oraz znaki $+,-,\cdot,:$ i $\sqrt{}$ zapisać liczbę niewymierną dodatnią mniejszą od $\frac{1}{n}$.

12. Liczby a i b są dodatnie i niewymierne. Czy możemy stąd wnioskować, że liczba $a+b$ jest niewymierna?

13. Liczby $a+b$, $b+c$ i $c+a$ są wymierne. Czy możemy stąd wnioskować, że liczby a, b, c są wymierne?

14. Liczby $a+b$, $b+c$ i $c+a$ są niewymierne. Czy możemy stąd wnioskować, że liczba $a+b+c$ jest niewymierna?

15. Liczby $a+b$, $b+c$, $c+d$ i $d+a$ są wymierne. Czy możemy stąd wnioskować, że liczby a, b, c, d są wymierne?

16. Wskaż liczbę wymierną pomiędzy $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ oraz $\frac{1}{\sqrt{5}}$ oraz liczbę niewymierną pomiędzy $\frac{2}{\sqrt{5}}$ oraz $\frac{3}{\sqrt{10}}$.

3.2.3. *Problemy.*

1. Dowiedź, że nie istnieje liczba wymierna q spełniająca równość

$$q^q = 5\,.$$

2. Dowiedź, że liczba $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}$ jest niewymierna.

3. Czy liczba

$$\sqrt{11+6\sqrt{2}} + \sqrt{11-6\sqrt{2}}$$

jest wymierna?

4. Czy liczba $\sqrt{57-40\sqrt{2}} - \sqrt{57+40\sqrt{2}}$ jest całkowita?

5. Dowiedź, że

$$\sqrt{3-\sqrt{8}} + \sqrt{5-\sqrt{24}} + \sqrt{7-\sqrt{48}} = 1.$$

6. Jak poznać z postaci ułamka $\frac{p}{q}$ (p, q są względnie pierwsze), czy liczba ma zapis dziesiętny skończony, czy okresowy?

7. Co można powiedzieć o postaci ułamka $\frac{p}{q}$, jeśli liczba ma zapis dziesiętny:
(a) skończony
(b) okresowy?

8. Wyznaczyć wszystkie takie pary (a,b) liczb wymiernych dodatnich, że:

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{4+\sqrt{7}}$$

9. Pokaż, że liczba $\sqrt{n} + \sqrt{m}$ ($n, m \in \mathbf{N}$) jest wymierna tylko wtedy, gdy każdy ze składników jest liczbą wymierną.

10. Pokaż, że poniższe rozwinięcia dziesiętne odpowiadają liczbom niewymiernym.

$$0,101001000100001..., \qquad 0,123...8910111213...192021...$$

4. ZBIORY LICZBOWE I KRESY

4.1. **Wprowadzenie.** Ten krótki rozdział poświęcony jest kilku pojęciom związanym ze zbiorami liczbowymi. Będziemy tu mieli na myśli podzbiory $\mathbf{R}$. Typowymi przykładami są odcinki otwarte i domknięte, półproste, punkty i wszystko, co można otrzymać przez sumy, różnice, przekroje i dopełnienia. Jednak taki ”dowolny” zbiór może nie być wcale takiej postaci. Przecież aby określić zbiór potrzeba i wystarczy powiedzieć które punkty należą, a które nie należą do danego zbioru i wcale nie musi się to składać na jakiś odcinek. W szczególności zajmiemy się pojęciem *kresów zbiorów* (górny - sup oraz dolny - inf). Dla jasności - wszystkie poniższe definicje dotyczą zbiorów niepustych.

Definicja 4.1
Zbiór $A \subseteq \mathbf{R}$ nazywamy *ograniczonym z góry*, gdy istnieje liczba $M \in \mathbf{R}$, taka że:

$$\forall a \in A \quad a \le M$$

Każdą liczbę $M \in \mathbf{R}$ spełniającą powyższy warunek nazywamy *ograniczeniem górnym* zbioru A.

Definicja 4.2
Zbiór $A \subseteq \mathbf{R}$ nazywamy *ograniczonym z dołu*, gdy istnieje liczba $m \in \mathbf{R}$, taka że:

$$\forall a \in A \quad a \ge m$$

Każdą liczbę $m \in \mathbf{R}$ spełniającą powyższy warunek nazywamy *ograniczeniem dolnym* zbioru A.

Definicja 4.3
Zbiór $A \subseteq \mathbf{R}$ nazywamy *ograniczonym*, gdy jest ograniczony z dołu i z góry.

Oczywiste jest, że jeśli pewna liczba jest ograniczeniem górnym zbioru, to każda większa liczba też jest takim ograniczeniem. Często chcemy znać takie optymalne ograniczenie. Poniższy fakt, który podajemy bez dowodu (ścisły argument wymaga trochę pracy), mówi o tym, że takie najmniejsze ograniczenie górne istnieje dla każdego zbioru ograniczonego z góry.

Fakt 4.4
Niech $A \subseteq \mathbf{R}$ będzie zbiorem ograniczonym z góry. Wtedy istnieje liczba $\widetilde{M} =: \sup A$ zwana *kresem górnym*, która jest najmniejszym ograniczeniem górnym, tzn. każde M, które również jest ograniczeniem górnym spełnia $M \geq \widetilde{M}$.

Dla ograniczeń dolnych jest analogicznie.

Fakt 4.5
Niech $A \subseteq \mathbf{R}$ będzie zbiorem ograniczonym z dołu. Wtedy istnieje liczba $\widetilde{m} =: \inf A$ zwana *kresem dolnym*, która jest największym ograniczeniem dolnym, tzn. każde m, które również jest ograniczeniem dolnym spełnia $m \leq \widetilde{m}$.

W praktyce często znajdujemy kresy danego zbioru (sup i inf) przez ustalenie jakie są największe/najmniejsze elementy lub do jakiej wartości zbliżają się te elementy. Aby uzasadnić, że znalezione wartości są supremum i infimum tego zbioru można posłużyć się następującym twierdzeniem.

Twierdzenie 4.6
Liczba $\widetilde{M}$ jest kresem górnym ograniczonego z góry zbioru A wtedy i tylko wtedy, gdy $\widetilde{M}$ jest ograniczeniem górnym zbioru A oraz

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists a \in A \qquad a > \widetilde{M} - \varepsilon. \tag{4.1}$$

Liczba $\widetilde{m}$ jest kresem dolnym ograniczonego z dołu zbioru A wtedy i tylko wtedy, gdy $\widetilde{m}$ jest ograniczeniem dolnym zbioru A oraz

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists a \in A \qquad a < \widetilde{m} + \varepsilon. \tag{4.2}$$

Dowód. Dowód przeprowadzimy tylko dla pierwszej części. Druga jest analogiczna i jest treścią zadania 4. Pokażemy dwie implikacje[4]

- Załóżmy, że $\widetilde{M} = \sup A$. Wtedy z definicji M jest ograniczeniem górnym zbioru A. Pozostaje sprawdzić warunek (4.1). Nie wprost: załóżmy, że istnieje $\varepsilon_0 > 0$ taki, że dla każdego $a \in A$ zachodzi: $a \leq \widetilde{M} - \varepsilon$. Ale to przecież oznacza, że liczba $\overline{M} = \widetilde{M} - \varepsilon$, mniejsza od $\widetilde{M}$, jest również ograniczeniem górnym zbioru A, a to przeczy definicji. Otrzymana sprzeczność kończy dowód pierwszej implikacji.
- Załóżmy, że $\widetilde{M}$ jest ograniczeniem górnym i zachodzi (4.1). Pokażemy, że w istocie $\widetilde{M} = \sup A$. Gdyby było mniejsze ograniczenie górne $M' < \widetilde{M}$, to dla $\varepsilon = \widetilde{M} - M' > 0$ warunek (4.1) mówi, że istnieje $a_0 \in A$ spełnające $a_0 > \widetilde{M} - \varepsilon = M'$, co przeczy temu, że M' było ograniczeniem górnym. Kolejna sprzeczność kończy dowód.

□

Na koniec jeszcze jedna definicja.

[4]Stwierdzenie "wtedy i tylko wtedy, gdy" odpowiada logicznemu warunkowi $\iff$, który jest równoważny dwom implikacjom, jak pamiętamy: $(p \iff q) \iff (p \implies q \wedge q \implies p)$

Definicja 4.7

Zbiór A posiada *element największy*, gdy istnieje $\tilde{a} \in A$ taki, że $\tilde{a}$ jest jednocześnie ograniczeniem górnym zbioru A (równoważnie można powiedzieć, że $\tilde{a} = \sup A$). Podobnie definiujemy *element najmniejszy*.

4.1.1. *Przykłady.*

Przykład 4.8

Poniżej podajemy przykłady zbiorów A wraz z $\inf A$ oraz $\sup A$. Zakładamy tutaj, że $a < b < c$.

$$
\begin{array}{lll}
A = (a,b] \cup \{c\}, & \inf A = a, & \sup A = c,. \\
B = [a,b) \cup (c,\infty), & \inf B = a, & \sup B\text{- nie istnieje.} \\
C = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\}, & \inf C = 0, & \sup C = 1. \\
D = \mathbf{Q}, & \inf D\text{- nie istnieje,} & \sup D\text{- nie istnieje.}
\end{array}
$$

Dowód. Uzasadnimy dla przykładu kresy zbioru C. Oczywiście dla $n \in \mathbf{N}$ zachodzi

$$0 < \frac{1}{n} < 1,$$

więc 0 jest ograniczeniem dolnym, a 1 ograniczeniem górnym. Oczywiście nie może być mniejszego ograniczenia górnego, bo $1 \in C$. Załóżmy zatem, że pewna liczba $m > 0$ jest (lepszym niż 0) ograniczeniem dolnym. Skoro $m > 0$, to znajdziemy tak duże $n \in \mathbf{N}$, że $1/n < m$, ale to jest sprzeczność (bo m miało być ograniczeniem dolnym zbioru A, a przecież $1/n \in A$). To dowodzi, że $\inf A = 0$. □

Przykład 4.9

Niech A będzie zbiorem

$$A = \left\{\frac{n-2}{n^2} \ : \ n \in \mathbf{N}\right\}.$$

Wtedy $\inf A = -1$ oraz $\sup A = \frac{1}{8}$.

Dowód. Przyjrzyjmy się wyrażeniu $\frac{n-2}{n^2}$ dla początkowych n:

$$-1, 0, \frac{1}{9}, \frac{1}{8}, \frac{3}{25}, \frac{1}{9}, \dots .$$

Nietrudno zauważyć, że tylko jeden wyraz jest ujemny, więc $\inf A = -1$ (jest to ograniczenie dolne i nie znajdziemy lepszego). Wydaje się, że $\frac{1}{8}$ ma szansę być $\sup A$ i rzeczywiście tak jest. Pokażemy, że

$$\frac{n-2}{n^2} \le \frac{1}{8} \tag{4.3}$$

dla $n \in \mathbf{N}$ i to zakończy dowód (tego, że nie ma mniejszego ograniczenia górnego nie trzeba pokazywać). Nierówność (4.3) jest równoważna następującej: $8n - 16 \le n^2$, a ta po użyciu wzoru skróconego mnożenia zmienia się w: $(n-4)^2 \ge 0$, co jest oczywiście prawdą. □

Przykład 4.10

Mamy dany zbiór

$$B = \left\{\frac{mn}{m^2 + 9n^2} \ : \ m, n \in \mathbf{N}\right\}.$$

Wyznacz kresy zbioru. Czy są one elementami tego zbioru?

Rozwiązanie. Zauważmy, że wszystkie elementy tego zbioru są dodatnie. Ponadto, gdy $n = 1$ mamy elementy postaci

$$\frac{m}{m^2+9}.$$

takie elementy mogą być dowolnie małe, więc $\inf B = 0$ i nie jest to oczywiście żaden z elementów tego zbioru. Do znalezienia $\sup B$ użyjemy znanej nierówności

$$2ab \le a^2 + b^2. \tag{4.4}$$

Wstawiając: $a = m$ i $b = 3n$ dostajemy $6mn \le m^2 + 9n^2$, czyli

$$\frac{mn}{m^2+9n^2} \le \frac{1}{6}.$$

Zatem wszystkie elementy zbioru B są niewiększe niż 1/6. W dodatku dla $m = 1$ i $n = 3$ dostajemy element równy 1/6, więc $\sup B = 1/6$ i jest to element zbioru B. Zauważmy, że zgadnięcie $m = 1$ i $n = 3$ nie było przypadkowe - można to wymyśleć wiedząc kiedy w nierówności (4.4) zachodzi równość. □

4.2. **Lista zadań.**

4.2.1. *Ćwiczenia.*

1. Niech $a < b$. Policz (z uzasadnieniem) kresy odcinka $A = (a, b]$.
2. Zbiór A składa się ze skończenie wielu punktów. Jakie są jego kresy?
3. Wyznacz kres górny i dolny następujących zbiorów. Zbadaj, czy podane zbiory posiadają element najmniejszy i największy.

(a)
$$A = \{-3 + 2^k \ : \ k \in \mathbf{Z}\}.$$

(b)
$$A = \{1 - 2^n \ : \ n \in \mathbf{N}\}.$$

(c)
$$\left\{x \in \mathbf{R} : \ x^2 < 2\right\},$$

(d)
$$\left\{x \in \mathbf{R} : \ x^4 \ge 5\right\},$$

(e)
$$\left\{\frac{mn}{4m^2+n^2} \ : \ m, n \in \mathbf{N}\right\}.$$

(f)
$$\left\{\frac{n}{n+m} : m, n \in \mathbf{N}\right\}$$

4.2.2. *Zadania.*

1. Wyznacz kres górny i dolny zbioru ułamków dziesiętnych postaci $0,88...8$. Czy zbiór ten posiada element największy?
2. Wyznacz kres górny i dolny następujących zbiorów. Zbadaj, czy podane zbiory posiadają element najmniejszy i największy.

(a)
$$\left\{\frac{37^n}{n!} : n \in \mathbf{N}\right\},$$
(b)
$$\left\{\frac{1}{m} - \frac{n}{n+1} : m,n \in \mathbf{N}\right\},$$
(c)
$$\left\{\frac{m^2+n^2}{2mn} : m,n \in \mathbf{N}\ ,\ m<n\right\},$$
(d)
$$\left\{\frac{mnk}{m^3+n^3+k^3} : m,n,k \in \mathbf{N}\right\},$$
(e)
$$\left\{n,m \in \mathbf{N}\ :\ \frac{(n+m)^2}{2^{nm}}\right\}.$$
(f)
$$\{x^2 : x \in (-4,\ 9)\},$$
(g)
$$\left\{\frac{n}{2n+3} : n \in \mathbf{N}\right\},$$
(h)
$$\left\{\frac{n!}{5^n} : n \in \mathbf{N}\right\},$$
(i)
$$\left\{\binom{2009}{n} : n \in \mathbf{N} \wedge n \le 2009\right\},$$
(j)
$$\left\{\left(\frac{1}{n} - \frac{2}{3}\right)^2 : n \in \mathbf{N}\right\},$$
(k)
$$\left\{\sqrt{n^2+n} - n : n \in \mathbf{N}\right\},$$
(l)
$$\left\{\sqrt[n]{3} - \sqrt[m]{2} : m,n \in \mathbf{N}\right\},$$
(m)
$$\left\{\frac{7}{n} - 3m : m,n \in \mathbf{N}\right\},$$
(n)
$$\left\{\frac{m^2+4n^2}{mn} : m,n \in \mathbf{N}\right\},$$
(o)
$$\left\{\frac{m^2+5n^2}{mn} : m,n \in \mathbf{N}\right\},$$
(p)
$$\left\{\frac{3m^2+7n^2}{mn} : m,n \in \mathbf{N}\right\},$$
(q)
$$\left\{\left(\sqrt{37}-5\right)^n : n \in \mathbf{N}\right\},$$
(r)
$$\left\{\left(\sqrt{37}-6\right)^n : n \in \mathbf{N}\right\},$$
(s)
$$\left\{\left(\sqrt{37}-7\right)^n : n \in \mathbf{N}\right\},$$
(t)
$$\left\{\left(\sqrt{37}-8\right)^n : n \in \mathbf{N}\right\},$$
(u)
$$\left\{\frac{mn}{m^2+n^2+1} : m,n \in \mathbf{N}\right\}.$$

3. Niech A i B będą niepustymi ograniczonymi zbiorami liczb rzeczywistych.
Niech $a_1 = \inf A$, $a_2 = \sup A$, $b_1 = \inf B$, $b_2 = \sup B$. Co można powiedzieć o następujących kresach:
(a) $\inf\{-a :\ a \in A\}$
(b) $\sup\{a^2 :\ a \in A\}$
(c) $\inf\{a^2 :\ a \in A\}$
(d) $\sup\{a-b :\ a \in A,\ b \in B\}$
(e) $\sup\{ab :\ a \in A,\ b \in B\}$
(f) $\inf\{ab :\ a \in A,\ b \in B\}$

4. Udowodnij drugą część twierdzenia 4.6.

5. Zbiory A i B są niepuste i ograniczone. Zbiór B jest skończony i wszystkie jego elementy są różne od 0. Czy zbiór $\{\frac{a}{b} :\ a \in A,\ b \in B\}$ musi być ograniczony? Uzasadnij odpowiedź.

6. A jest takim niepustym zbiorem ograniczonym liczb rzeczywistych, że $\inf A = -3$, $\sup A = 2$. Jakie wartości mogą przyjmować kresy zbioru $\{|a| :\ a \in A\}$?

7. Podaj przykład takich zbiorów A, B, że $\inf A = 2$, $\sup A = 7$, $\inf B = 3$, $\sup B = 10$, $\inf(A \cap B) = 4$, $\sup(A \cap B) = 6$, $A \cap \mathbf{N} = B \cap \mathbf{N} = \emptyset$.

8. Przeczytaj poniższe warunki. Które z nich są równoważne temu, że $g = \sup A$?

(a) $(\forall a \in A \ a \le g) \wedge (\forall \varepsilon > 0 \ \exists a \in A \ a < g + \varepsilon)$
(b) $(\forall a \in A \ a \le g) \wedge (\forall \varepsilon > 0 \ \exists a \in A \ a > g - 2\varepsilon)$
(c) $(\forall a \in A \ a \le g) \wedge \left(\forall n \in \mathbf{N} \ \exists a \in A \ a > g - \frac{1}{n}\right)$

5. NIERÓWNOŚCI

5.1. **Wprowadzenie.** W tym rozdziale zajmiemy się problemem szacowania wielkości matematycznych. Naszym celem jest nabranie umiejętności spojrzenia na wyrażenia matematyczne w sposób przybliżony - gdy nie interesuje nas konkretna wartość wyrażenia, ale pewne ogólne własności (np. ograniczenie górne/dolne przez jakąś liczbę lub prostsze wyrażenie). W tym rozdziale nie podajemy żadnej teorii. Zamiast tego skupimy się na przykładach, które sprowadzają się jedynie do przekształceń algebraicznych i elementarnych nierówności.

5.1.1. *Przykłady.*

Przykład 5.1
Oszacuj liczbę 1000! od góry i dołu przez potęgi dziesiątki.

Rozwiązanie. W iloczynie mamy 9 liczb jednocyfrowych, 90 dwucyfrowych, 900 trzycyfrowych oraz liczbę 1000. Oczywiście każda liczba x, która ma n cyfr spełnia $10^{n-1} \le x < 10^n$. Zatem

$$1000! \ge 1^9 \cdot 10^{90} \cdot 100^{900} \cdot 1000 = 10^{90+1800+3} = 10^{1893},$$
$$1000! \le 10^9 \cdot 100^{90} \cdot 1000^{900} \cdot 1000 = 10^{9+180+2700+3} = 10^{2892},$$

z czego wynika, że liczba 1000! ma co najmniej 1894 cyfry oraz co najwyżej 2893 cyfry. □

Przykład 5.2
Wskaż n_0 takie, że dla liczby $n \ge n_0$ prawdziwa jest nierówność

$$n^4 \le 2^n. \tag{5.1}$$

Rozwiązanie. Wykorzystamy ZIM. Zacznijmy nietypowo od drugiego kroku indukcyjnego:

- **Z2.** zakładamy, że dla pewnego k zachodzi $k^4 \le 2^k$. Wtedy:
$$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k \ge 2k^4 \ge^{(?)} (k+1)^4,$$
przy czym nierówność (?) zachodzi dokładnie, gdy $2 \ge \left(\frac{k+1}{k}\right)^4 = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^4$. Zauważmy teraz, że dla $k = 6$ nierówność zachodzi, bo $(7/6)^4 \le 2$ (sprawdź). Dla większych k prawa strona jest jeszcze mniejsza, czyli pokazaliśmy, że krok indukcyjny zachodzi od $k = 6$.
- **Z1.** niestety nierówność (5.1) nie jest prawdziwa dla $n = 6$, ale łatwo ją sprawdzić n.p. dla $n = 20$, bo $(L) = 20^4 = 160000$ i $(P) = 2^{20} = (2^{10})^2 \ge 1000^2$.

Na mocy zmodyfikowanej ZIM nierówność jest prawdziwa dla $n \ge 20$. □

Przykład 5.3
Wskazując odpowiednie liczby wymierne dodatnie C, D (niezależne od n) udowodnij, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą nierówności

$$C \le \frac{4n^4 + 3n^3 - 2}{5n^4 - 4n^2 + 2} \le D\,.$$

Rozwiązanie. Szacując dane wyrażenie od góry otrzymujemy

$$\frac{4n^4 + 3n^3 - 2}{5n^4 - 4n^2 + 2} \le \frac{4n^4 + 3n^4 - 0}{5n^4 - 4n^4 + 0} = \frac{7n^4}{n^4} = 7\,.$$

Z kolei szacowanie od dołu prowadzi do

$$\frac{4n^4+3n^3-2}{5n^4-4n^2+2} \geq \frac{4n^4+0-2n^4}{5n^4-0+2n^4} = \frac{2n^4}{7n^4} = \frac{2}{7}\,.$$

Zatem dane w zadaniu nierówności są spełnione ze stałymi $C = 2//7$ oraz $D = 7$. □

Przykład 5.4

Wskazując odpowiednie liczby wymierne dodatnie C, D (niezależne od n) udowodnij, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą nierówności

$$C \leq \frac{4n^4-3n^3+2}{5n^4+4n^2-2} \leq D\,.$$

Rozwiązanie. Szacując dane wyrażenie od góry otrzymujemy

$$\frac{4n^4-3n^3+2}{5n^4+4n^2-2} \leq \frac{4n^4-0+2n^4}{5n^4+0-2n^4} = \frac{6n^4}{3n^4} = 2\,.$$

Z kolei szacowanie od dołu prowadzi do

$$\frac{4n^4-3n^3+2}{5n^4+4n^2-2} \geq \frac{4n^4-3n^4+0}{5n^4+4n^4-0} = \frac{n^4}{9n^4} = \frac{1}{9}\,.$$

Zatem dane w zadaniu nierówności są spełnione ze stałymi $C = 1//9$ oraz $D = 2$. □

Przykład 5.5

Wskazując odpowiednie liczby wymierne dodatnie C, D oraz liczbę rzeczywistą k udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności:

$$C\cdot n^k \leq \frac{n^6+2n^4+1}{\sqrt{n}+2} \leq D\cdot n^k.$$

Rozwiązanie. Domyślamy się, że $k = 5{,}5$ (w liczniku wyrażenia najważniejszym składnikiem jest n^6, a w mianowniku $\sqrt{n}$). Szacujemy z góry:

$$\frac{n^6+2n^4+1}{\sqrt{n}+2} \leq \frac{n^6+2n^6+n^6}{\sqrt{n}} = 4n^{5{,}5}$$

I z dołu:

$$\frac{n^6+2n^4+1}{\sqrt{n}+2} \geq \frac{n^6}{\sqrt{n}+2\sqrt{n}} = \frac{1}{3}n^{5{,}5}.$$

□

5.2. **Lista zadań.**

5.2.1. *Ćwiczenia.*

1. Oszacuj przez potęgi dziesiątki następujące liczby:

$$2^{1000}, \quad 100!.$$

2. Dla $a,b \in \mathbf{R}$ oraz $c > 0$ udowodnij nierówności:

$$a^2+b^2 \geq 2ab, \quad a^3+2 \geq 2a\sqrt{a}, \quad 2(a^2+b^2) \geq (a+b)^2.$$

3. Dowiedź, że dla dowolnej liczby naturalnej $n \geq$ .... zachodzi nierówność

$$n^2 \leq 2^n\,.$$

W miejsce kropek wstaw liczbę, dla której udaje się łatwo zredagować dowód.

5.2.2. *Zadania.*

1. Oszacuj od góry i dołu wyrażenie

$$\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}+\ldots+\sqrt{9n}\,.$$

2. Dowiedź, że dla dowolnej liczby naturalnej $n \geq$ .... zachodzi nierówność

$$n^8 \leq 2^n\,.$$

Zastanowić się nad modyfikacją dowodu tak, aby zmniejszyć liczbę wpisaną w miejsce kropek.

3. Oszacuj podane poniżej wyrażenia od góry i od dołu ($n \in \mathbf{N}$) przez wyrażenia różniące się stałym czynnikiem dodatnim (o ile nie podano inaczej).

(a)

$$\frac{n^4+2n^3+n+7}{4n^4+n^2+15},$$

(b)

$$\frac{n\sqrt{n+4}+5}{\sqrt{n^3+4}+1},$$

(c)

$$\frac{2^n+10n^2}{2^n+n^4},$$

(d)

$$\frac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2+3}+\ldots+\sqrt{2n^2}}{2n+5},$$

(e)

$$\frac{n!}{n!+10^n},$$

(f)

$$\frac{n^6+5n+4}{2n^3-n^2+7},$$

(g)

$$\frac{x}{x^2+1} \qquad \text{(tylko od góry, } x \in \mathbf{R}\text{)},$$

(h)

$$\frac{6x^7-5x^5+7}{5x^7-2x^4+3}, \qquad (x \in (0,\,+\infty)),$$

(i)

$$\frac{n^5+n^4+1}{2n^5+n^3+5}, \qquad \text{(szacowanie postaci } g \pm C/n,\text{)}$$

(j)

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{2n}$$

(k)

$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}, \qquad \text{(szacowanie postaci } g \pm C/n\text{)},$$

4. Oszacuj

$$\sqrt[n]{n}.$$

5. Która z liczb jest większa:

$$2^{1000!} \text{ czy } 999^{999!}?$$

$$26^{99} \text{ czy } 10^{151}?$$

$$\prod_{i=2}^{2009} \prod_{j=1}^{i-1} \left(\sqrt[i]{j} - \sqrt[j]{i} \right) \text{ czy } 10^{-1000000}?$$

6. Uprość wyrażenie[5]

$$\left(3^{2^n} - 2^{2^m}\right) \cdot \prod_{i=0}^{37} \left(3^{2^{n+i}} + 2^{2^{m+i}}\right).$$

7. Niech $a = \sqrt[4]{2}$. Która z liczb jest większa

$$a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{16}}}}}}}}}}}}}}}} \qquad \text{czy} \qquad 10^{10^{10}}\ ?$$

Pomoc dla osób dostających oczopląsu: liczba a występuje w pierwszym wyrażeniu 16 razy.

8. Niech $a = \sqrt[16]{2}$. Która z liczb jest większa

$$a^{256} \qquad \text{czy} \qquad 256^{a}\ ?$$

9. Uporządkuj następujące liczby w kolejności rosnącej:

$$a = \left(5 - \sqrt{37}\right)^{2008}, \qquad b = \left(6 - \sqrt{37}\right)^{2009}, \qquad c = \left(7 - \sqrt{73}\right)^{2011}. \qquad d = \left(9 - \sqrt{73}\right)^{2013}.$$

10. Która z liczb jest większa $2^{2^{2^{1001}}}$ czy $1000^{2^{2^{1000}}}$?

11. Która z liczb jest większa $\sqrt[45]{45}$ czy $1{,}08$? (W rozwiązaniu wolno korzystać z własności potęgowania, wolno wykonywać obliczenia na liczbach naturalnych mniejszych od 200 oraz wolno wykorzystać równości $3^{19} = 1\,162\,261\,467$ i $5^{13} = 1\,220\,703\,125$.)

12. Wskaż taką liczbę naturalną n, że

$$n^{1000000} + 1 < 2^n .$$

13. Wskazując odpowiednią liczbę całkowitą k udowodnij nierówności $10^k < L < 10^{2k}$.

(a) $L = 3972^{257}$

(b) $L = 700!$

14. Wskazując odpowiednie liczby wymierne dodatnie C, D udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności $C < W(n) < D$.

(a) $W(n) = \dfrac{n^4 + 16n + 3}{2n^4 + 7n^2}$

(b) $W(n) = \dfrac{\sqrt{n+7} + 3}{\sqrt{n+3} + 7}$

(c) $W(n) = \sqrt[3]{n^3 + n^2} - n$

15. Wskazując odpowiednie liczby wymierne dodatnie C, D oraz liczbę rzeczywistą k udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C \cdot n^k < W(n) < D \cdot n^k .$$

[5]Uwaga: zgodnie z obowiązującą konwencją, w napisie typu a^{b^c} potęgowanie wykonuje się *od góry*, tzn. $a^{b^c} = a^{(b^c)}$.

(a) $W(n)=\dfrac{n^7+10n^3+3}{n^4+37}$

(b) $W(n)=\dfrac{n^3+2n^2+1}{\sqrt{n^6+2}+2}$

16. Wskazując odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$1-\frac{C}{n}<W(n)<1+\frac{C}{n}\ .$$

(a) $W(n)=\dfrac{n^2+2n+3}{n^2+7n+2}$

(b) $W(n)=\dfrac{\sqrt{4n^2+1}}{2n+1}$

17. Wskazując odpowiednie liczby wymierne dodatnie C, g udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$g-\frac{C}{n}<W(n)<g+\frac{C}{n}\ .$$

(a) $W(n)=\dfrac{2n^2+2n+3}{3n^2+7n+2}$

(b) $W(n)=\dfrac{\sqrt{4n^2+1}}{3n+1}$

18. W każdym z ośmiu poniższych zadań wpisz w miejscu kropek dwie liczby występujące w ciągu 0, 1, 2, 5 ,10, 100, 10^5, 10^{10}, 10^{20}, 10^{50}, 10^{100}, 10^{200}, 10^{500}, 10^{1000}, 10^{2000}, 10^{5000}, 10^{10000}, 10^{20000}, 10^{50000}, 10^{100000}, 10^{200000}, 10^{500000}, $10^{1000000}$ na kolejnych miejscach tak, aby powstały prawdziwe nierówności.

$$\ldots<10000!<\ldots,$$
$$\ldots<2^{10000}<\ldots,$$
$$\ldots<\binom{10000}{5}<\ldots,$$
$$\ldots<30^{10000}<\ldots,$$
$$\ldots<2^{2^{10}}<\ldots,$$
$$\ldots<665!<\ldots,$$
$$\ldots<4444^{4444}<\ldots,$$
$$\ldots<7777^{7777}<\ldots,$$

5.2.3. *Problemy.*

1. Dowiedź, że dla dowolnej liczby naturalnej $n\geq$ .... zachodzi nierówność

$$n^{32}\leq 2^n\ .$$

W miejsce kropek wstaw dowolną liczbę, dla której umiesz przeprowadzić dowód. Następnie zastanów się nad modyfikacją dowodu tak, aby zmniejszyć liczbę wpisaną w miejsce kropek.

2. Wskaż liczbę naturalną $n>1$ spełniającą nierówność

$$n^{1000}<2^n\ .$$

3. Udowodnij nierówność

$$n^{2^{27}}\leq 2^n$$

dla wybranej przez siebie liczby naturalnej $n>1$. (Należy wybrać jedną liczbę n spełniającą nierówność i dla tej liczby udowodnić nierówność.)

6. WIĘCEJ NIERÓWNOŚCI

6.1. **Wprowadzenie.** W tym rozdziale sformułujemy i udowodnimy kilka klasycznych nierówności. Niech $a_1, a_2, \ldots$ będą dodatnimi liczbami.

Definicja 6.1
Średnią arytmetyczną liczb $a_1, \ldots, a_n$ nazywamy liczbę

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

Średnią geometryczną liczb $a_1, \ldots, a_n$ nazywamy liczbę

$$G_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}.$$

Średnią harmoniczną liczb $a_1, \ldots, a_n$ nazywamy liczbę

$$H_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}.$$

Średnią kwadratową liczb $a_1, \ldots, a_n$ nazywamy liczbę

$$K_n = \left(\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n} \right)^{1/2}.$$

Łatwo zauważyć, że średnia jest zawsze liczbą pomiędzy największą a najmniejszą z "uśrednianych" liczb[6]

Powyższe oznaczenia (A_n, G_n, H_n, K_n) będą używane poniżej bez wracania do definicji. Np. A_7 oznacza średnią arytmetyczną liczb $a_1, \ldots, a_7$ oraz G_{n-1} średnią geometryczną liczb $a_1, \ldots, a_{n-1}$.

Twierdzenie 6.2 (Nierówność Cauchy'ego o średnich)
Pomiędzy średnimi zachodzą następujące nierówności: $H_n \le G_n \le A_n \le K_n$, tzn.

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}} \le \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} \le \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \le \left(\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n} \right)^{1/2}.$$

Dodatkowo: jeśli w powyższym zachodzi jakakolwiek równość, to $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Dowód. Mamy do udowodnienia trzy nierówności. Pierwsza z nich wynika z drugiej (zob. zadanie 13).

Dowód nierówności $G_n \le A_n$ Zauważmy, że udowodniliśmy już tę nierówność w problemie 3 z rozdziału o indukcji. Tutaj podamy inny dowód indukcyjny. Oczywiście dla $n = 1$ nierówność jest równością. Załóżmy, że nierówność zachodzi dla $n-1$, tzn. $G_{n-1} \le A_{n-1}$ oraz równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 = a_2 = \ldots = a_{n-1}$. Rozważmy teraz układ n liczb: $a_1, \ldots, a_n$. Niech a_i będzie najmniejszą z nich oraz a_j - największą. Gdyby $a_i = a_j$, to wszystkie były by równe i nie ma co robić. Załóżmy zatem, że $r := a_j - a_i > 0$. Wykonamy teraz następującą operację: liczby a_i i a_j "zbliżamy" do siebie zastępując przez $a_i + \varepsilon$ i $a_j - \varepsilon$ dla $\varepsilon < r/2$. Zauważmy, że ta operacja nie zmienia średniej arytmetycznej A_n (sprawdź!) natomiast zwiększa średnią geometryczną G_n, ponieważ

$$(a_i + \varepsilon)(a_j - \varepsilon) = a_i \cdot a_j + \varepsilon(a_j - a_i) - \varepsilon^2 = a_i \cdot a_j + \varepsilon(a_j - a_i - \varepsilon) > a_i \cdot a_j.$$

[6] Tak naprawdę, to ta własność jest definicją "średniej".

Oczywiście $a_i < A_n < a_j$, więc poprzez "zbliżanie" możemy zamienić parę a_i, a_j tak, aby jedna z nich wynosiła A_n (tutaj A_n jest średnią arytmetyczną zarówno przed i po zamianie). Mamy zatem udowodnić nierówność:

$$A_n \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \cdot A_n}$$

Która jest równoważna nierówności:

$$A_n^{1-\frac{1}{n}} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_{n-1}},$$

a ta nierówność po podniesieniu do potęgi $n/(n-1)$ staje się dokładnie nierównością $G_{n-1} \leq A_{n-1}$, która jest prawdziwa z założenia indukcyjnego. □

6.1.1. *Przykłady.*

Przykład 6.3
Dla $x > 0$ zachodzi

$$x + \frac{1}{x} \geq 2$$

przy czym równość zachodzi dokładnie wtedy, gdy $x = 1$.

Dowód. Dzieląc obie strony przez 2 po lewej stronie otrzymujemy średnią arytmetyczną liczb x i $1/x$. Średnia geometryczna tych liczb jest równa 1. Równość w powyższych średnich zachodzi, gdy $x = 1/x$, czyli $x = 1$. □

Przykład 6.4
Udowodnij nierówność

$$\sqrt[4]{a^2bc} + \sqrt[4]{b^2ca} + \sqrt[4]{c^2ab} \leq a + b + c.$$

Kiedy zachodzi równość?
Rozwiązanie. Wyrażenie $\sqrt[4]{a^2bc}$ jest średnią geometryczną liczb a, a, b, c zatem jest nie większa od $(a + a + b + c)/4$. Postępując podobnie dla pozostałych pierwiastków mamy

$$\sqrt[4]{a^2bc} + \sqrt[4]{b^2ca} + \sqrt[4]{c^2ab} \leq \frac{(a + a + b + c) + (b + b + c + a) + (c + c + a + b)}{4} = a + b + c.$$

□

6.2. **Lista zadań.**

6.2.1. *Ćwiczenia.* Do końca tego rozdziału n oznacza liczbę naturalną, a pozostałe występujące liczby są rzeczywiste i dodatnie, chyba że jest powiedziane inaczej. Polecenie jest jedno: "Udowodnij nierówność".

1.
$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2,$$

2.
$$2 \cdot (a^2 + b^2) \geq (a + b)^2,$$

3.
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a + b},$$

4.
$$(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc,$$

5.
$$\frac{a + b}{c} + \frac{b + c}{a} + \frac{c + a}{b} \geq 6.$$

6.2.2. *Zadania.*

1.
$$a^6+b^9 \geq 12a^2b^3-64$$

2.
$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a} \geq 4$$

3.
$$\sqrt[3]{abc}+\sqrt[3]{bcd}+\sqrt[3]{cda}+\sqrt[3]{dab} \leq a+b+c+d$$

4. dla $0<a_i<1$ oraz $S=a_1+\ldots+a_n$
$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{1-a_i} \geq \frac{nS}{n-S}$$

5.
$$\frac{2}{a+b}+\frac{2}{b+c}+\frac{2}{c+a} \geq \frac{9}{a+b+c}$$

6.
$$\sqrt{2a+1}+\sqrt{2b+1}+\sqrt{2c+1} \leq \sqrt{15}, \text{ o ile } a+b+c=1$$

7.
$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{S-a_i} \geq \frac{n}{n-1}, \text{ gdzie } S=a_1+\ldots+a_n$$

8.
$$2(a^3+b^3)^2 \geq (a^2+b^2)^3$$

9.
$$\sqrt[n]{ab}+\sqrt[n]{bc}+\sqrt[n]{ca} \leq \sqrt[n]{3^{n-2}} \text{ dla } a,b,c \text{ takich, że } a+b+c=1$$

10.
$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1)^m > n^{m+1}$$

11. Liczby dodatnie x,y,z spełniają warunek $xyz=1$ Udowodnij, że $(x+2y)(y+2z)(z+2x) \geq 27$.

12. Liczby dodatnie x,y,z spełniają warunek $x+y+z=1$. Wykaż, że:
$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right) \geq 64.$$

13. Z nierówności $G_n \leq A_n$ wywnioskuj nierówność $H_n \leq A_n$. Użyj podstawienia takiego, by średnia arytmetyczna zamieniła się w harmoniczną.

6.2.3. *Problemy.*

1.
$$a+b+c \leq 9 \text{ dla } a,b,c \text{ takich, że } a^3+b^3+c^3=81$$

2.
$$a^3+b^3+c^3 \geq 16\sqrt{\frac{2}{3}} \text{ dla } a,b,c \text{ takich, że } a^2+b^2+c^2=8$$

3.
$$\frac{1}{a+ab+abc}+\frac{1}{b+bc+bca}+\frac{1}{c+ca+cab} \leq \frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{abc}}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

4. Niech a,b,c będą długościami boków trójkąta. Boki te spełniają równość $bc+ac+ab=27$. Wykaż, że $9<a+b+c<11$

5. Dowiedź, że jeśli a,b,c,d są liczbami dodatnimi, to zachodzi nierówność
$$\frac{1}{a+b+c}+\frac{1}{a+b+d}+\frac{1}{a+c+d}+\frac{1}{b+c+d}\geq\frac{16}{3(a+b+c+d)}.$$

6. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x_1,...x_n$ ma miejsce:
$$\Pi_{i=1}^{n}x_i\leq\Sigma_{i=1}^{n}\frac{x_i^{2i}}{2^n}.$$

7. Liczby rzeczywiste dodatniea,b,c spełniają warunek $ab+bc+ca=3$. Dowiedz, że:
$$a^3+b^3+c^3+6abc\geq 9.$$

8. Suma liczb dodatnich a,b,c równa jest 1. Udowodnij,że:
$$a^2+b^2+c^2+2\sqrt{3abc(a+b+c)}\leq(a+b+c)^2.$$

9. Znajdź wszystkie takie liczby naturalne n, że nierówność
$$x_1x_2+x_2x_3+..+x_{n-1}x_n\leq\frac{n-1}{n}(x_1^2+...+x_n^2)$$
jest prawdziwa.

10. Dowiedź, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a,b,c i liczby całkowitej $n\geq 1$ zachodzi nierówność
$$\frac{a^{n+1}}{b+c}+\frac{b^{n+1}}{a+c}+\frac{c^{n+1}}{b+a}\geq\left(\frac{a^n}{b+c}+\frac{b^n}{a+c}+\frac{c^n}{b+a}\right)\sqrt[n]{\frac{a^n+b^n+c^n}{3}}.$$

11. Pokaż, że dla dowolnych nieujemnych liczb rzeczywistych zachodzi:
$$(a+b+c+d)^2\leq 3(a^2+b^2+c^2+d^2)+6ab.$$

7. CIĄGI LICZBOWE

7.1. **Wprowadzenie.** Przypomnijmy, że ciągiem a nazywamy funkcję $a:\mathbf{N}\to\mathbf{R}$ i najczęściej ciąg będziemy oznaczać (a_n). Taka funkcja może być zdefiniowana wzorem, ale istnieją też inne sposoby, na przykład - rekurencja (podajemy pierwsze wyrazy i relacje między sąsiednimi wyrazami). Każdy ciąg posiada swój wykres na który składają się punkty (n,a_n) w układzie kartezjańskim.

Definicja 7.1
Ciąg (a_n) nazywamy:

- *rosnącym*, gdy $\forall n\in\mathbf{N}\quad a_n<a_{n+1}$,
- *niemalejącym*, gdy $\forall n\in\mathbf{N}\quad a_n\leq a_{n+1}$,
- *malejącym*, gdy $\forall n\in\mathbf{N}\quad a_n>a_{n+1}$,
- *nierosnącym*, gdy $\forall n\in\mathbf{N}\quad a_n\geq a_{n+1}$,
- *ograniczonym*, gdy $\exists M\ \forall n\in\mathbf{N}\quad |a_n|\leq M$,
- *ograniczonym z góry*, gdy $\exists M\ \forall n\in\mathbf{N}\quad a_n\leq M$,
- *ograniczonym z dołu*, gdy $\exists m\ \forall n\in\mathbf{N}\quad a_n\geq m$.

Definicja 7.2 (Granica ciągu)
Liczbę $g\in\mathbf{R}$ nazywamy *granicą ciągu*, gdy

(7.1) $$\forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbf{N}\ \forall n\geq N\quad |a_n-g|<\varepsilon.$$

Jeśli taka liczba g istnieje, to piszemy $g=\lim_{n\to\infty}a_n$ i mówimy, że ciąg (a_n) jest *zbieżny* do liczby g.

Powyższa definicja jest jedną z najważniejszych w analizie matematycznej. Intuicyjnie rozumiemy tak: "dalekie wyrazy ciągu są coraz bliższe liczbie g". Zauważmy, że nierówność $|a_n - g| < \varepsilon$ oznacza dokładnie: "odległość liczb a_n oraz g jest mniejsza niż ε", czyli $a_n \in (g-\varepsilon, g+\varepsilon)$. Natomiast kwantyfikatory $\exists N\ \forall n \geq N$ oznaczają, że ten warunek jest prawdziwy dla wszystkich liczb $N, N+1, N+2, \ldots$, czyli od pewnego miejsca N. Inaczej mówiąc, jeśli g jest granicą ciągu (a_n), to biorąc dowolny przedział $(g-\varepsilon, g+\varepsilon)$ tylko skończenie wiele wyrazów ciągu może być poza tym przedziałem.

Powyższa definicja zakłada milcząco, że jeśli granica ciągu istnieje, to jest tylko jedna liczba g spełniająca warunek (7.1). Uzasadnimy to teraz precyzyjniej.

Fakt 7.3
Jeśli ciąg (a_n) jst zbieżny, to istnieje tylko jedna liczba g spełniająca warunek (7.1).

Dowód. Będziemy rozumowali nie wprost. Niech g_1 i g_2 będą dwiema różnymi liczbami spełniającymi (7.1). Możemy przyjąć, że $g_1 < g_2$. Oznaczmy przez $d = g_2 - g_1$ odległość tych liczb. Korzystając z definicji (7.1) dla $\varepsilon = d/2$ dostajemy N_1 i N_2 takie, że:

$$\forall n \geq N_1\ \ |a_n - g_1| < d/2 \qquad \text{oraz} \qquad \forall n \geq N_2\ \ |a_n - g_2| < d/2.$$

Oczywiście dla $n \geq N := \max(N_1, N_2)$ zachodzą obie te nierówności, czyli dla $n \geq N$ zachodzi

$$a_n \in (g_1 - d/2, g_1 + d/2) \cap (g_2 - d/2, g_2 + d/2),$$

ale to jest niemożliwe, bo przedziały: $(g_1 - d/2, g_1 + d/2)$ i $(g_2 - d/2, g_2 + d/2)$ są rozłączne (sprawdź to!). Otrzymana sprzeczność kończy dowód. □

Fakt 7.4
Jeśli ciąg (a_n) jest zbieżny, to jest ograniczony.

Dowód. Niech $g = \lim_{n\to\infty} a_n$. Wtedy z (7.1) dla $\varepsilon = 1$ istnieje N takie, że

$$\forall n \geq N\ \ |a_n - g| < 1,$$

czyli dla $n \geq N$ zachodzi $a_n \in (g-1, g+1)$. W szczególności (sprawdź to!)

$$|a_n| \leq \max(|g-1|, |g+1|)$$

dla $n = N, N+1, \ldots$. Niech teraz $M := \max(|a_1|, \ldots, |a_{N-1}|, |g-1|, |g+1|)$. Łatwo sprawdzamy, że $|a_n| \leq M$ dla wszystkich $n \in \mathbf{N}$ (dla $n < N$ jest to jasne, dla $n \geq N$ już sprawdziliśmy). □

Mając do policzenia granicę ciągu rzadko będziemy sprawdzali warunek (7.1) bezpośrednio. Mając złożone wyrażenie definiujące ciąg (a_n) możemy sprowadzić policzenie granicy $\lim_{n\to\infty} a_n$ do liczenia granicy poszczególnych "elementów" dzięki następującemu twierdzeniu.

Twierdzenie 7.5 (Arytmetyka granic)
Niech (a_n) oraz (b_n) będą ciągami zbieżnymi oraz: $A = \lim_{n\to\infty} a_n$, $B = \lim_{n\to\infty} b_n$. Wtedy:

1.
$$\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = A \pm B,$$

2.
$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = A \cdot B,$$

3. Zakładając że $b_n, B \neq 0$ mamy:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}.$$

Dowód. Udowodnimy tylko własność z mnożeniem. Pozostałe własności zostawiamy jako zadania 12 i 13. Niech (a_n), (b_n), A, B będą jak wyżej. Z faktu 7.4 mamy M takie, że $\forall n \in \mathbf{N}$ mamy $|a_n| \leq M$. Ustalmy $\varepsilon > 0$ [7] Pokażemy teraz, że $|a_n \cdot b_n - A \cdot B| < \varepsilon$ dla n od pewnego miejsca. Niech $M' = \max M, |B|$. Ponieważ $A = \lim_{n\to\infty} a_n$ oraz $B = \lim_{n\to\infty} b_n$ to korzystając z definicji dla $\varepsilon/2M' > 0$ (dlaczego tak można?) dostajemy N_1 i N_2 takie, że

$$\forall n \geq N_1 \ \ |a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2M'} \qquad \text{oraz} \qquad \forall n \geq N_2 \ \ |b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2M'}.$$

Oczywiście dla $n \geq N = \max(N_1, N_2)$ zachodzą obie te nierówności. I dla takich n ($n \geq N$) zachodzi to, czego potrzeba, czyli:

$$\begin{aligned}|a_n \cdot b_n - A \cdot B| &= |a_n \cdot b_n - a_n \cdot B + a_n \cdot B - A \cdot B| \leq |a_n| \cdot |b_n - B| + |a_n - A| \cdot B \\ &< M \cdot \frac{\varepsilon}{2M'} + \frac{\varepsilon}{2M'} \cdot B \leq \varepsilon,\end{aligned}$$

czyli pokazaliśmy, że $A \cdot B = \lim_{n\to\infty}(a_n \cdot B_n)$. □

Przykład 7.6

Arytmetyka granic oznacza na przykład, że mając ciąg (przyjmujemy $d_n \neq 0$):

$$e_n = \frac{a_n \cdot b_n - c_n}{d_n}$$

możemy policzyć po prostu granice ciągów a_n, b_n, c_n, d_n (niech wynoszą one odpowiednio A, B, C, D, $D \neq 0$). Wtedy ciąg e_n ma granicę i wynosi ona $(A \cdot B - C)/D$.

Definicja 7.7 (Granica niewłaściwa ciągu)

Mówimy, że ciąg (a_n) jest *rozbieżny* do $+\infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall M\ \exists N \in \mathbf{N} \forall n \geq N \ \ a_n > M.$$

Piszemy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$. Analogicznie, ciąg (a_n) jest *rozbieżny* do $-\infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall M\ \exists N \in \mathbf{N}\ \forall n \geq N \ \ a_n < M.$$

Piszemy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Fakt 7.8

Jeśli w ciągu (a_n) zmienimy lub pominiemy skończenie wiele wyrazów ciągu, to nie ma to wpływu na istnienie i wartość granicy.

Fakt 7.9

Załóżmy , że ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne, $A = \lim_{n\to\infty} a_n$, $B = \lim_{n\to\infty} b_n$ oraz $a_n \leq b_n$ (odpowiednio $a_n \geq b_n$). Wtedy to $A \leq B$ (odpowiednio $A \geq B$).

Uwaga: jeśli w powyższym fakcie znak "≤" zastąpimy w obu miejscach przez "<", to nie jest to prawda, patrz zadanie 15.

Twierdzenie 7.10 (Twierdzenie o trzech ciągach)

Jeżeli ciągi (a_n), (b_n), (c_n) spełniają warunek

$$a_n \leq b_n \leq c_n$$

oraz ciągi (a_n) i (c_n) są zbieżne do tej samej granicy g, to ciąg (b_n) też jest zbieżny i jego granicą jest g.

[7] Taka formułka jest jedną z częściej spotykanych w dowodach z analizy. Skoro mamy coś pokazać dla każdego $\varepsilon > 0$, to piszemy ustalmy $\varepsilon > 0$, żeby mieć na myśli jakąś konkretną liczbę przez cały dowód, a na koniec i tak powiemy, że ε było ustalone, ale dowolne.

Powyższe twierdzenie możemy również zastosować do ciągów mających granice niewłaściwe. Wtedy formułujemy je następująco.

Twierdzenie 7.11 (Twierdzenie o dwóch ciągach)
Załóżmy, że ciągi (a_n), (b_n) spełniają warunek $a_n \le b_n$. Jeśli $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, to również $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$. Podobnie, $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$ implikuje $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Fakt 7.12
Niech ciąg (a_n) będzie monotoniczny (niemalejący lub nierosnący). Wtedy:

1. jeśli (a_n) jest organiczony, to ma granicę.
2. jeśli (a_n) nie jest organiczony ma granicę niewłaściwą.

Dowód. Rozważmy tylko ciągi niemalejące. Niech (a_n) będzie takim ciągiem. Wtedy są dwie możliwości. Jeśli ciąg jest nieograniczony, to łatwo sprawdzamy, że jest rozbieżny do $+\infty$. Jeśli jest ograniczony, to $g = \sup\{a_n : n \in \mathbf{N}\}$ jest granicą takiego ciągu. Fakt ten wynika bezpośrednio z monotoniczności i definicji kresu (sprawdź!). □

Uwaga 7.13
Warto pamiętać, że arytmetyka granic zachodzi też w niektórych przypadkach niewłaściwych, o ile nie dochodzimy do symboli nieoznaczonych takich jak:

$$\frac{0}{0},\quad \frac{\infty}{\infty},\quad 0\cdot\infty,\quad \infty-\infty,\quad 0^0,\quad 1^\infty,\quad \infty^0.$$

7.1.1. *Przykłady.*

Przykład 7.14
Kilka podstawowych granic:

- $\lim\limits_{n\to\infty} a = a$,
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$,
- $\lim\limits_{n\to\infty} n = +\infty$,
- $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = +\infty$ dla $a > 1$,
- $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$ dla $|a| < 1$,
- $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n$ nie istnieje,
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ dla $a > 0$,
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Przykład 7.15
Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^4-n^2+1}{5n^5-n^3+1}+\frac{3n^4-2n^2+4}{5n^5-2n^3+8}+\frac{3n^4-3n^2+9}{5n^5-3n^3+27}+\ldots+\frac{3n^4-kn^2+k^2}{5n^5-kn^3+k^3}+\ldots+\frac{3n^4-2n^3+4n^2}{5n^5-2n^4+8n^3}\right).$$

Rozwiązanie. Dana pod znakiem granicy suma ma $2n$ składników i zapisuje się wzorem

$$b_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{3n^4-kn^2+k^2}{5n^5-kn^3+k^3}.$$

Szacowanie od góry daje

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{3n^4-kn^2+k^2}{5n^5-kn^3+k^3} \le \sum_{k=1}^{2n} \frac{3n^4-0+4n^2}{5n^5-2n^4+0} = \frac{2n\left(3n^4+4n^2\right)}{5n^5-2n^4} = c_n.$$

Szacując od dołu otrzymujemy

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{3n^4 - kn^2 + k^2}{5n^5 - kn^3 + k^3} \geq \sum_{k=1}^{2n} \frac{3n^4 - 2n^3 + 0}{5n^5 - 0 + 8n^3} = \frac{2n\left(3n^4 - 2n^3\right)}{5n^5 + 8n^3} = a_n \,.$$

Ponieważ dla dowolnego n zachodzą nierówności $a_n \leq b_n \leq c_n$, a ponadto

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = 6//5\,,$$

na mocy twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 6//5\,.$$

□

7.2. **Lista zadań.**

7.2.1. *Ćwiczenia.*

1. Dla $\varepsilon = 0,1$ znaljdź liczbę naturalną N taką, że

$$\left|\frac{3n-2}{n+1} - 3\right| < \varepsilon, \quad \text{dla } n \geq N.$$

Zrób to samo dla $\varepsilon = 0,001$ a potem dla dowolnej wartości $\varepsilon > 0$.

2. Udowodnij, że $g = 1$ jest granicą ciągu $a_n = \frac{1}{1+n}$, tzn. dla ustalonego $\varepsilon > 0$ znajdź N takie, że dla $n \geq N$ zachodzi:

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon.$$

3. Policz granice następujących ciągów (zbadaj też granice niewłaściwe):

(a) $$\frac{n}{n+7}$$

(b) $$\frac{4n^2+3n}{n+1}$$

(c) $$\frac{5n^3+n^2-6}{3n^4+7}$$

(d) $$\frac{\sqrt[3]{n^2+n}}{n+2}$$

(e) $$n\cdot(-1)^n$$

(f) $$2^n - \frac{1}{n}$$

4. Wyjaśnij, dlaczego poniżej są same bzdury:
- $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = 0 \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = 0$
- $\lim_{n\to\infty} (-1)^n = \begin{cases} -1 & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \\ 1 & \text{dla } n \text{ parzystych} \end{cases}.$

5. Uzasadnij, że jeśli ciąg (a_n) ma granicę $A > 0$, to tylko skończenie wiele wyrazów ciągu może być ujemnych.

6. Uzasadnij, że jeśli ciągi (a_n) i (b_n) mają granice A i B oraz $d := B - A > 0$, to istnieje N takie, że

$$\forall n \geq N \quad b_n - a_n > d/2$$

Wskazówka: przyjrzyj się dowodowi faktu 7.3.

7.2.2. *Zadania.*

1. Wyprowadź z definicji zbieżności ciągu następujące równości:

(a)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{3n-2} = \frac{2}{3},$$

(b)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n^2+1} = 0,$$

(c)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0,$$

(d)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-3n+1}{2n^2+n+1} = \frac{1}{2}.$$

2. Policz granice następujących ciągów (zbadaj też granice niewłaściwe):

(a)
$$\frac{5n^4+n^2-6}{3n^4+7}$$

(b)
$$\frac{5n^5+n^2-6}{3n^4+7}$$

(c)
$$\frac{n}{1+\sqrt{n}}$$

(d)
$$\frac{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^7}{n^3(1+7\sqrt{n+2})}$$

(e)
$$\frac{\sqrt{3^n+2^n}}{\sqrt{3^n+1}}$$

(f)
$$\frac{7n+(\sqrt[3]{n}\sqrt[6]{n})^5\sqrt{9n+1}}{11n^3+7n+3}$$

3. Policz granice następujących ciągów (zbadaj też granice niewłaściwe):

(a)
$$\frac{1-2+3-4+5-6+\ldots-2n}{\sqrt{n^2+2}}$$

(b)
$$\frac{1+2+4+\ldots+2^n}{1+3+9+\ldots+3^n}$$

(c)
$$\frac{1+2+3+\ldots+n}{n^2}$$

(d)
$$\frac{3^0+3^1+3^2+3^3+\ldots+3^n}{3^n}$$

(e)
$$\frac{n^2+1}{n^3+1}+\frac{n^2+2}{n^3+2}+\frac{n^2+3}{n^3+3}+\ldots+\frac{n^2+n}{n^3+n}$$

(f)
$$\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+2}+\ldots+\frac{1}{(n+1)^2}$$

4. Policz granice następujących ciągów (zbadaj też granice niewłaściwe):

(a)
$$\sqrt[n^2]{n}$$

(b)
$$\sqrt[n]{n^2}$$

(c)
$$\sqrt[n]{n+17}$$

(d)
$$\frac{\sqrt{3^n+n^2}}{\sqrt{3^n+2^n+1}}$$

(e)
$$\sqrt{n^2+3n}-n$$

(f)
$$n(\sqrt{n^2+7}-n)$$

(g)
$$\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+7}-\sqrt{n}}$$

(h)
$$\frac{\sqrt{n^2+1}-n}{(\sqrt{n^2+n+1}-n)^2}$$

(i)
$$\frac{1}{(2+(-1)^n)^n}$$

(j)
$$\frac{n^7}{7^n}$$

(k)
$$\frac{10^n}{n!}$$

(l)
$$\frac{n!}{n^{22}}$$

5. Oblicz wartość granicy
$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{\sqrt{9^n+n^{2010}}}$$
lub uzasadnij, że granica nie istnieje.

6. Oblicz granicę
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n^3+k}{n^4+(-1)^k\cdot k^2}.$$

7. Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(n^3\cdot\sqrt{n^2+1}-n^4-\frac{n^2}{2}\right).$$

8. Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{8n^2+1}}{\sqrt{2n^4+1}}+\frac{\sqrt{8n^2+2}}{\sqrt{2n^4+2}}+\frac{\sqrt{8n^2+3}}{\sqrt{2n^4+3}}+\frac{\sqrt{8n^2+4}}{\sqrt{2n^4+4}}+\ldots+\frac{\sqrt{8n^2+3n}}{\sqrt{2n^4+3n}}\right).$$

9. Pokaż, że jeśli ciąg (a_n^2) jest zbieżny, to ciąg (a_n) nie musi być zbieżny. A jeśli ciąg (a_n^2) jest zbieżny do zera?

10. Pokaż, że jeśli nieujemny ciąg (a_n) jet zbieżny do $a>0$, to ciąg $(\sqrt{a_n})$ jest zbieżny do $\sqrt{a}$.

11. Załóżmy, że ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne, $\lim_{n\to\infty}a_n=A>0$, $\lim_{n\to\infty}b_n=0$ oraz $b_n>0$. Udowodnij, że:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=+\infty.$$

12. Udowodnij punkt **1.** twierdzenia 7.5.

13. Udowodnij punkt **3.** twierdzenia 7.5.

14. Załóżmy, że (a_n) jest zbieżny i $\lim_{n\to\infty}a_n=g$. Udowodnij, że $\lim_{n\to\infty}|a_n|=|g|$. Pokaż, że implikacja w drugą stronę nie zachodzi, tzn. podaj przykład ciągu (b_n), który nie jest zbieżny, ale $(|b_n|)$ już jest zbieżny.

15. Podaj przykład dwóch ciągów zbieżnych takich, że $a_n<b_n$ oraz $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n$ (por. fakt 7.9).

16. Czy prawdziwe są następujące stwierdzenia:

(a) Jeżeli ciągi (a_n) i (b_n) są rozbieżne, to ciąg (a_n+b_n) jest rozbieżny.

(b) Jeżeli ciąg (a_n) jest zbieżny, a ciąg (b_n) rozbieżny, to ciąg (a_n+b_n) jest rozbieżny.

(c) Jeżeli ciąg (a_n) jest zbieżny, a ciąg (b_n) rozbieżny, to ciąg (a_nb_n) jest rozbieżny.

(d) Jeżeli ciąg (a_n) jest zbieżny, ciąg (b_n) rozbieżny, a ponadto obydwa ciągi mają tylko wyrazy dodatnie, to ciąg (a_nb_n) jest rozbieżny.

(e) Jeżeli (a_n) jest ciągiem zbieżnym o wyrazach dodatnich, to jego granica jest liczbą dodatnią.

(f) Jeżeli $\frac{a_{n+1}}{a_n}\to\frac{1}{2}$, to $a_n\to\frac{1}{2}$.

(g) Jeżeli ciąg $(\frac{a_{n+1}}{a_n})$ jest zbieżny, to ciąg (a_n) jest zbieżny.

(h) Jeżeli ciąg (a_n^2) jest zbieżny, to ciąg (a_n) jest zbieżny.

(i) Jeżeli wśród wyrazów ciągu (a_n) występują zarówno wyrazy dodanie jak i ujemne, to ciąg (a_n) jest rozbieżny.

(j) Jeżeli wśród wyrazów ciągu (a_n) występują zarówno wyrazy mniejsze od 1 jak i większe od 3, to ciąg (a_n) jest rozbieżny.

17. Ciąg (a_n) spełnia warunek

$$\forall n>1000\quad |a_n-100|<10\,.$$

Czy stąd wynika, że:

(a) ciąg (a_n) jest zbieżny,

(b) ciąg (a_n) jest rozbieżny,

(c) $a_{1111} > 88$,

(d) $\forall n > 345\ |a_n - 100| < 17$,

(e) $\forall n > 5555\ |a_n - 99| < 13$,

(f) ciąg (a_n) jest ograniczony,

(g) $\exists n > 444\ |a_n - 95| < 37$,

(h) $\exists n > 4444\ |a_n - 80| < 37$,

(i) $\forall m\ \exists n > m\ a_n > 0$,

(j) $\forall n > 1331\ |a_n - 66| > 12$,

(k) $\forall m > 1234\ \ \forall n > 5678\ |a_n - a_m| < 17$,

(l) $\forall m > 1234\ \ \forall n > 5678\ |a_n - a_m| < 37$,

(m) $\exists m < 123\ \ \exists n < 456\ |a_n - a_m| < 3$,

(n) $\forall m > 12345\ \ \forall n > 67890\ |a_n + a_m| < 210$,

(o) $\forall m > 1296\ \ \forall n > 7776\ |a_n + a_m| < 222$,

(p) $\exists n\ a_n > 91$.

18. Dany jest taki ciąg (a_n), że

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \forall n \geq 5//\varepsilon \quad |a_n - 7| < \varepsilon\ .$$

(a) Podaj granicę ciągu (a_n).

(b) Wskaż taką liczbę M, że $\forall n \quad |a_n| < M$.

(c) Wskaż taką liczbę N, że $\forall n \geq N \quad a_n > 6$.

(d) Wskaż taką liczbę N, że $\forall n \geq N \quad a_n < 7{,}01$.

(e) Wskaż taką liczbę N, że $\forall n \geq N \quad |a_n - 8| > 1//3$.

19. Które z poniższych warunków są równoważne zbieżności ciągu (a_n) do liczby g.

(a) $\forall n \in \mathbf{N}\ \exists N \in \mathbf{N}\ \forall m \geq N \qquad |a_m - g| < \frac{1}{n}$,

(b) $\forall n \in \mathbf{N}\ \exists N \in \mathbf{N}\ \forall m \geq 2^N \qquad |a_m - g| < \frac{1}{2^n}$.

7.2.3. *Problemy.*

1. Pokaż, że ciąg $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ jest rosnący i ograniczony z góry, a zatem zbieżny.

2. Znajdź granicę ciągu

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \ldots + \frac{2n-1}{2^n}.$$

3. Udowodnij, że dla $q \in (0,1)$ ciąg $a_n = q^n$ jest zbieżny do zera.
Wskazówka 1: Skorzystaj z tego, że $q^{n+1} = q \cdot q^n$ oraz q_n jest malejący i dodatni.
Wskazówka 2: Skorzystaj z nierówności Bernoulliego zapisując $1/q = 1 + r$ dla $r > 0$.

4. Ciąg (a_n) jest zadany przez: $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2}$. Udowodnij, że ciąg jest zbieżny i policz jego granicę.

5. Oblicz granicę ciągu

$$a_n = \sqrt{2}\sqrt[4]{2}\sqrt[8]{2}\ldots\sqrt[2^n]{2}.$$

6. Znajdź granice:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\ldots\cos\frac{x}{2^n}\right) \quad (0 < x < \pi)$$

$$\lim_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)$$

7. Znajdź liczbę naturalną k taką, że

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2008}{n^k - (n-1)^k} = \frac{1}{2009}.$$

8. Znajdź granice ciągów

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}, \qquad \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n.$$

9. Znajdź granice ciągów

$$n^{\frac{1}{n^2}}, \qquad n^{\frac{1}{\sqrt{n}}}.$$

10. Niech (q_n) będzie ciągiem liczb wymiernych dodatnich, a (a_n), (b_n) - ciągami liczb naturalnych, takich że

$$q_n = \frac{a_n}{b_n}, \qquad \lim_{n\to\infty} q_n = x \notin \mathbf{Q}.$$

Pokaż, że $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$.

11. Znajdź granice ciągów:

$$a_n = \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\dots\left(1-\frac{1}{2^n}\right), \qquad b_n = \left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\dots\left(1+\frac{1}{2^n}\right).$$

Wskazówka: $a_n \cdot b_n < 1$. Ponadto: $1-2^n \geq \frac{\xi_n}{\xi_{n-1}}$ dla $\xi_n = 1+\frac{2}{n-1}$ oraz $n \geq 3$.

12. Zakładamy, że ciąg b_n jest zbieżny. Czy ciąg $c_n = n(b_n - b_{n-1})$ może być rozbieżny do $+\infty$?

8. SZEREGI LICZBOWE

8.1. **Wprowadzenie.** Dodawanie jest działaniem dwuargumentowym. Mając dwie liczby znamy ich sumę. Ogólniej, dla skończonego układu liczb mamy jego sumę. Jeśli próbujemy dodać nieskończenie wiele liczb napotykamy naturalne trudności. Suma nieskończenie wielu jedynek nie może być żadną liczbą rzeczywistą. Co więcej - dodając

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots$$

też przekroczymy dowolną liczbę rzeczywistą (zob. przykład 8.3). Jeszcze większy problem możemy mieć dodając nieskończenie wiele liczb dodatnich i ujemnych. Tutaj może okazać się, że wynik zależy od kolejności (!) sumowania - zob. problem 7.

Aby zrozumieć na czym polega nieskończone dodawanie posłóżymy się granicami ciągów.

Definicja 8.1 (Zbieżność szeregu)
Mówimy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny do liczby S, gdy

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) = S.$$

Piszemy wtedy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$.

Sumowanie nieskończone polega więc na policzeniu skończonych sum $S_n = a_1+\dots+a_n$ (tzw. sum częściowych) i sprawdzeniu, czy ciąg (S_n) ma granicę.

Może się zdarzyć, że granica ciągu S_n jest niewłaściwa, np. jeśli $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$. Wtedy piszemy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ i mówimy, że szereg jest rozbieżny do $+\infty$.

Fakt 8.2 (Warunek konieczny zbieżności)
Jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Dowód. Oczywiście $a_n = S_n - S_{n-1}$ oraz ciągi S_n i S_{n-1} mają tę samą granicę S. Z arytmetyki granic wynika, że a_n jest zbieżny i jego granicą jest $S - S = 0$. □

Oznacza to, że tylko szeregi o wyrazach dążących do zera mają szansę być zbieżne. Jednak nie jest to warunek wystarczający, jak pokazuje następujący przykaład.

Przykład 8.3
Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ jest rozbieżny do $+\infty$.

Dowód. Oczywiście sumy częściowe $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$ rosną. Pokażemy teraz, że nie są ograniczone. Niech N będzie pewną liczbą naturalną i policzmy

$$\begin{aligned} S_{2^N} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^N} \\ &\geq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^N} \\ &\geq \frac{N+1}{2}. \end{aligned}$$

W powyższym szacowaniu zamieniliśmy wszystkie ułamki $\frac{1}{n}$ dla $n \in \{2^{k-1}+1, \ldots, 2^k\}$ na najmniejszy z nich, czyli $\frac{1}{2^k}$ (a takich ułamków jest 2^{k-1}). Zatem każda taka grupa jest większa od $2^{k-1}\frac{1}{2^k} = \frac{1}{2}$. Zatem $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$. □

Przykład 8.4
Niech $a_1 \in \mathbf{R}$ oraz $q \in (-1, 1)$. Szereg geometryczny $a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \ldots + a_1 q^{n-1} + \ldots$ jest zbieżny do liczby $\frac{a_1}{1-q}$, czyli

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1} = \frac{a_1}{1-q}$$

Dowód. Przypomnijmy wzór $(1-q)(1+q+q^2+\ldots+q^{n-1}) = 1-q^n$ (sprawdź przez wymnożenie). Rozważmy sumy częściowe:

$$S_n = a_1 + \ldots + a_n = a_1 + a_1 q + \ldots + a_1 q^{n-1} = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}.$$

Ponieważ $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$, to z arytmetyki granic otrzymujemy, że:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q}.$$

□

Przykład 8.5
Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ jest zbieżny.

W powyższym przykładzie nie było trudno pokazać, że dany szereg jest zbieżny, ale już dużo trudniej jest policzyć dokładnie jego sumę. W istocie wynosi ona $\frac{\pi^2}{6}$ (!). Jest to typowe - często będziemy skupiali się na określeniu, czy szereg jest zbieżny, ale bez zastanawiania się nad jego sumą. Poniżej podamy najważniejsze kryteria używane do badania zbieżności szeregów.

Twierdzenie 8.6 (Kryterium porównanwcze)
Niech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ będą szeregami o wyrazach nieujemnnch, przy czym dla każdego $n \in \mathbf{N}$ zachodzi nierówność $a_n \leq b_n$.

1. Jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$, to $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$.
2. Jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$, to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$.

Twierdzenie 8.7 (Kryterium d'Alemberta)
Załóżmy, że (a_n) jest ciągiem o wyrazach niezerowych.

1. Jeśli istnieje granica

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = g < 1\,,$$

to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

2. Jeśli istnieje granica
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = g > 1\,,$$
to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

Twierdzenie 8.8 (Kryterium Cauchy'ego)
Niech (a_n) będzie dowolnym ciągiem.

1. Jeśli istnieje granica
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = g < 1\,,$$
to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.
2. Jeśli istnieje granica
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = g > 1\,,$$
to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

Szeregiem naprzemiennym nazywamy szereg, w którym co drugi wyraz jest przeciwnego znaku. Dla takich szeregów mamy dodatkowe kryterium.

Twierdzenie 8.9 (Kryterium Leibnitza)
Jeżeli (a_n) jest ciągiem malejącym (lub nierosnącym) zbieżnym do 0, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ jest szeregiem zbieżnym.

Z powyższego kryterium widzimy natychmiast, że mimo iż $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = \infty$, to już $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ jest szeregiem zbieżnym.

Definicja 8.10 (Zbieżność bezwzględna)
Mówimy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny bezwzględnie, gdy $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ jest zbieżny.

Definicja 8.11 (Zbieżność warunkowa)
Mówimy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny warunkowo, gdy jest zbieżny, ale $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ jest rozbieżny.

Fakt 8.12
Jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| < \infty$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

Powyższy fakt mówi, że szeregi bezwzględnie zbieżne są zbieżne, ale szereg $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ pokazuje, że nie jest odwrotnie. Szeregi, które są zbieżne, ale nie są bezwzględnie zbieżne nazywamy *warukowo zbieżnymi*.

8.1.1. *Przykłady.*

Przykład 8.13
Zbadaj zbieżność szeregów:

(a)
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+11}{7n+10}$$
(b)
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-1}{7n^2+10}$$
(c)
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+11}{7n^3+10}$$

Rozwiązanie. W przykładzie (a) wyraz szeregu $\frac{n+11}{7n+10}$ nie dąży do zera, więc szereg ten nie może być zbieżny. W przykładzie (b) mamy
$$\frac{3n-1}{7n^2+10} \geq \frac{3n-n}{7n^2+10n^2} = \frac{2}{17n} \qquad \text{oraz} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{17n} = \infty \text{ (zob. przykład 8.3)},$$

zatem z kryterium porównawczego (twierdzenie 8.6) szereg z podpunktu (b) jest rozbieżny. Podobnie postępujemy z ostatnim szeregiem (zob. przykład 8.5):

$$0 \leq \frac{n+11}{7n^3+10} \leq \frac{n+11n}{7n^3} \leq \frac{12}{7n^2} \qquad \text{oraz} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{7n^2} < \infty,$$

więc (również z kryterium porównawczego) ostatni szereg jest zbieżny. □

Przykład 8.14

Czy zbieżne są szeregi:

(a) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{5^n}$$

(b) $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$$

(c) $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt[10]{n}}$$

Rozwiązanie. W przykładzie (a) skorzystamy z kryterium d'Alemberta (twierdzenie 8.7). Niech $a_n = \binom{2n}{n}/(5^n)$. Wtedy

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\binom{2n+2}{n+1}}{5^{n+1}} \cdot \frac{5^n}{\binom{2n}{n}} = \frac{1}{5} \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{4}{5},$$

zatem pierwszy szereg jest zbieżny. W druigim przykładzie skorzystamy z kryterium Cauchy'ego (twierdzenie 8.8). Oznaczmy przez b_n wyraz ciągu.

$$\sqrt[n]{b_n} = \frac{n}{2n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2},$$

więc również drugi szereg jest zbieżny. Ostatni szereg również jest zbieżny, a wynika to wprost z kryterium Leibnitza (twierdzenie 8.9, sprawdź założenia!). □

8.2. **Lista zadań.**

8.2.1. *Ćwiczenia.*

1. Oblicz $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, a następnie znajdź $\lim_{n\to\infty} S_n$:

(a) $a_k = \dfrac{1}{7^k}$

(b) $a_k = \dfrac{2^k+5^k}{10^k}$

2. Zbadaj, czy następujące szeregi są zbieżne.

(a) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n+10}$$

(b) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$$

(c) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{2n^4-n^3+1}$$

(d) $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sqrt{n+3}$$

(e) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^{n^2}}$$

(f) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$$

3. Znajdź taki szereg geometryczny $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach dodatnich, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2.$$

4. Policz sumy częściowe szeregu
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)(2n+1)}$$
a następnie wyznacz sumę tego szeregu.
Wskazówka: Skorzystaj z tego, że
$$\frac{2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{2n+1-(2n-1)}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}.$$

8.2.2. *Zadania.*

1. Dowiedź, że $4 < \sum_{n=1}^{127} \frac{1}{n} < 7$.

2. Dowiedź, że szereg
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1}$$
jest zbieżny, a jego suma jest mniejsza od 2.

3. Rozstrzygnij, czy zbieżne są następujące szeregi:

(a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-1}$$
(b)
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$$
(c)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{n^2+1}$$
(d)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+4)}$$
(e)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^2-1}{n^3+6n^2+8n+47}$$
(f)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cdot 5\cdot 8\cdot \ldots \cdot (3n-1)}{1\cdot 5\cdot 9\cdot \ldots \cdot (4n-3)}$$
(g)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)\cdot 2^{2n-1}}$$
(h)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}$$
(i)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}$$
(j)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$$
(k)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{3^n \cdot n!}$$
(l)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$$
(m)
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)\sqrt{n+1}}$$
(n)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n}}$$
(o)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n-1}$$
(p)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^4}$$
(q)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+n}-n}$$
(r)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1000^n}{\sqrt[10]{n!}}$$
(s)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^{2^n}}$$
(t)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+\pi}{n^\pi+e}$$

4. Które z następujących szeregów są bezwzględnie zbieżne, które warunkowo zbieżne, a które rozbieżne:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 3^n}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n+1}{n}$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(n+4)(n+9)}}$

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^{10^n}}{3^{2^n}}$

5. Rozstrzygnij, które z następujących szeregów są zbieżne. Czy są bezwzględnie zbieżne?

$$1-1+1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+\ldots+1-\frac{1}{k}-\frac{1}{k}-\ldots-\frac{1}{k}+\ldots$$

$$1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{9}-\frac{1}{9}-\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{k}-\frac{1}{k^2}-\frac{1}{k^2}-\ldots-\frac{1}{k^2}+\ldots$$

6. Zbadaj zbieżność i bezwzględną zbieżność następujących szeregów:

(a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n^3}{2^n}$$

(b)
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n-\sqrt{n}}$$

(c)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^{n^2}}{n!}$$

(d)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+17}{3^n}$$

(e)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n!+1}}{n!}$$

(f)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n^2}}{(n+3)^{1//4}}$$

(g)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n(n+1)}(-1)^n$$

(h)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$$

(i)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n\sqrt{4^n+3^n}}$$

(j)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{n!}$$

(k)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{1/n}}$$

(l)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)(-1)^n$$

7. Podaj przykład takiego szeregu zbieżnego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach dodatnich, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 5 \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} = 2\,.$$

8. Podaj przykład takiego szeregu zbieżnego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach dodatnich, że dla dowolnej liczby naturalnej k zachodzi równość

$$a_k = 2 \cdot \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n\,.$$

9. Podaj przykład takiego szeregu zbieżnego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach dodatnich, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \frac{1}{2} \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^4 = \frac{1}{5}.$$

10. Podaj przykład takiego szeregu zbieżnego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o sumie 100 i wyrazach dodatnich, że $a_n = n$ dla $n \le 10$.

11. Podaj przykład takiego szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ rozbieżnego do $-\infty$, że $a_n = n$ dla nieskończenie wielu n.

12. Podaj przykład takiego szeregu rozbieżnego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, że granica $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ istnieje i jest mniejsza od 1.

13. Podaj przykład takiego szeregu zbieżnego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, że $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2$ dla nieskończenie wielu n.

14. Czy istnieje ciąg (a_n) taki, że (podaj przykład lub dowiedź, że nie istnieje):

(a) $a_n > \dfrac{1}{n}$ dla nieskończenie wielu n, $\forall n \in \mathbf{N}\ a_n > 0$, szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

(b) $a_n = \dfrac{1}{2^n}$ dla nieskończenie wielu n, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 10$.

(c) $\forall n \in \mathbf{N}\ a_{n^2} = \dfrac{1}{n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0$.

(d) $\forall n \in \mathbf{N}\ a_n \in \mathbf{Z}$, $a_n = n$ dla $n \le 100$, szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

(e) $a_n = 1$ dla nieskończenie wielu n, szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

(f) Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$ i $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ są rozbieżne.

(g) Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + a_{2n})$ jest zbieżny.

(h) Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + a_{2n})$ jest zbieżny, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

(i) Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, szereg $\sum_{n=0}^{\infty} (a_{2^n} + a_{2^n+1} + a_{2^n+2} + \ldots + a_{2^{n+1}-1})$ jest zbieżny, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

(j) Szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + a_{2n})$ i $a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n} + a_{2n+1})$ są zbieżne, ale mają różne sumy.

(k) Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ jest rozbieżny.

(l) Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ jest zbieżny.

15. Zbadaj zbieżność szeregów:

(a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^n}{(n+2)^n}.$$

(b)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^n}{(n+2)^{n+2}}.$$

16. Oblicz sumy szeregów

(a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)\cdot(-1)^n}{n(n+1)}$$

(b)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$$

17. Pokaż z kryterium porównawczego, że jeśli szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ są zbieżne, to zbieżny jest też szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$.

18. Na prostym odcinku torów dwa pociagi, jadące każdy z prędkością 30 km na godzinę, zbliżają się do siebie. Gdy odległość pomiędzy pociągami wynosi 1 km, pszczoła zaczyna latać tam i z powrotem pomiędzy pociągami z prędkością 60 km na godzinę. Wyraź odległość jaką przeleci pszczoła zanim pociagi się zderzą za pomoca nieskończonego szeregu i oblicz sumę tego szeregu.

19. Rozwiąż poprzednie zadanie odpowiadając na pytanie: jak długo będzie latała pszczoła?

20. Oprocentowanie lokaty w banku w skali rocznej wynosi p procent ($p > 0$). Bank nalicz odsetki co $1/n$ roku. Policz efentywne oprocentowanie w skali roku (czyli ile razy zwiększy nam się kapitał x po roku). Zobacz jak zmienia się zysk dla $p = 10$ i $n = 1, 2, 12, 365$.

21. Mrówka idzie z prędkością 30 cm na minutę wzdłuż jednorodnej gumowej taśmy. Na początku taśma ma długość 1 m i pod koniec każdej minuty jest rozciągana o dodatkowy metr. Mrówka zaczyna marsz w jednym końcu taśmy. Czy kiedykolwiek dotrze do drugiego końca? Jeśli tak, to po jakim czasie?
Wskazówka: Niech a_n oznacza stosunek odległości mrówki od początku taśmy do aktualnej długości taśmy. Wyraź a_{n+1} poprzez a_n.

8.2.3. *Problemy.*

1. Zbadaj zbieżność szeregu
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}\cdot n!\cdot a^n}{n^n}$$
w zależności od parametru rzeczywistego dodatniego a. Dla jednej wartości a możesz nie udzielić odpowiedzi.

2. Oblicz sumę szeregów:

(a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}$$

(b)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

(c) Układamy cegły o jednakowej długości jedna na drugiej w ten sposób, aby konstrukcja nie zawaliła sie, tzn. musza byc zachowane prawa fizyki. Pokaż, że można cegły ułożyć tak, aby brzeg górnej cegły był wysunięty w prawo od brzegu dolnej cegły tak daleko jak zechcemy.

3. Dowiedz się jak brzmią kryteria Abela i Dirichleta zbieżności szeregów a następnie zbadaj zbieżność szeregów:

(a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{cos(nx)}{n}, \qquad (x \in \mathbf{R})$$

(b)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sin(nx)}{n}, \qquad (x \in \mathbf{R})$$

(c)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\operatorname{arctg} n}{n}$$

(d)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \cdot \sin(n^2)}{n}$$

4. Dowiedz się na czym polega kryterium o zagęszczaniu i zbadaj zbieżność szeregów:

(a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log^{10} n}$$

(b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \log^{a} n}, \qquad (a > 0)$$

(c)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \log n \log(\log n)}$$

5. Niech $a_n = n^{-1}$ gdy n jest kwadratem oraz $a_n = n^{-2}$ w przeciwnym wypadku. Zbadaj zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
6. Zbadaj zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(n) n^{-2}$, gdzie $\lambda(n)$ oznacza ilość cyfr w zapisie dziesiętnym liczby n.
7. Niech $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ oraz $\sigma : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ będzie permutacją liczb naturalnych (tzn. funkcją różnowartościową i "na"). Pokaż, że jeśli w szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ zmienimy kolejność sumowania, tzn. policzymy sumę $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$, to nowa suma może mieć dowolną wartość $S \in \mathbf{R}$ (a nawet $+\infty$ lub $-\infty$).
8. W szeregu harmonicznym wstawiamy znak minus przy wyrazach postaci $n = 2^k$, a pozostałe wyrazy pozostawiamy bez zmian. Wykaż, że tak otrzymany szereg jest rozbieżny.
9. Wiadomo, że $\lim_{n\to\infty} n^2 a_n = c \neq 0$. Pokaż, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.
10. Wiadomo, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n$ jest zbieżny. Pokaż, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny bezwzględnie.
11. Wiadomo, że a_n jest ciągiem rosnącym zbieżnym do a. Pokaż, że
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \ldots + a_n^n} = a.$$
12. Podaj przykład ciągu (a_n) takiego, że $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, ale $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$ rozbieżny.

9. SZEREGI POTĘGOWE

9.1. **Wprowadzenie.** Szeregi potęgowe, to szeregi liczbowe specjalnej postaci. Mając zadane współczynniki $(a_n)_n$, szeregiem potęgowym nazywamy

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \tag{9.1}$$

gdzie $x \in \mathbb{R}$ jest zmienną (parametrem). Pierwszym pytaniem, które sobie zadajemy widząc szereg potęgowy jest: dla których x-ów szereg jest zbieżny? Odpowiedzią jest następujący fakt.

Fakt 9.1

Szeregu potęgowy (9.1) jest zbieżny:

1. dla x_0 i rozbieżny dla innych x lub
2. dla wszyskich $x \in \mathbb{R}$ lub
3. w w przedziale $(x_0 - R, x_0 + R)$ oraz rozbieżny w przedziałach $(-\infty, x_0 - R), (x_0 + R, \infty)$, gdzie $R \in (0, \infty)$ jest tzw. *promieniem szeregu potęgowego*.

Zauważmy, że w ostatnim (najważniejszym) przypadku fakt nic nie mówi o punktach $x_0 - R$ i $x_0 + R$, które zwykle będziemy musieli analizować indywidualnie.

Dowód. Bez straty ogólności możemy założyć, że $x_0 = 0$ (inne przypadki to tylko proste przesunięcie). Promień zbieżności R jest dany wzorem

$$R = \sup\left\{t \geq 0 \ : \ \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| r^n\right\}.$$

Jeśli $R = \infty$, to dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$ szereg jest absolutnie zbieżny. Załóżmy, że $R \in [0, \infty)$. Wtedy, dla $|x| < R$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|a_n x^n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| R^n < \infty,$$

więc szereg jest absolutnie zbieżny.

Z drugiej strony, załóżmy nie wprost, że $|x| > R$ (dążymy do pokazania, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ jest rozbieżny). Wtedy $\lim_{n\to\infty} a_n x^n = 0$, a więc istnieje C, takie że $|a_n x^n| \leq C$ dla $n \in \mathbb{N}$. Ustalmy r spełniające $R < r < |x|$ i zauważmy, że

$$|a_n| r^n = \left|a_n x^n\right| (r/|x|)^n \leq C\,(r/|x|)^n\,.$$

Ten ostatni szereg geometryczny jest zbieżny, więc $\sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n$ również, ale to przeczy definicji R, bo $r > R$. Otrzymana sprzeczność kończy dowód. □

Przykład 9.2

1. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ jest zbieżny dla $x \in (-1, 1)$ (R=1).
2. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} n! x^n$ jest zbieżny dla $x = 0$.
3. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$ jest zbieżny dla $x \in [-1, 1)$.
4. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x^n$ jest zbieżny dla $x \in [-1, 1]$.

Powyższe przykłady wynikają z wiadomości o prostych ciągach, kryteriów Cauchy'ego, d'Alemberta i Leibnitza.

Przykład 9.3

Zbadaj zbieżność szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n 10^n}.$$

Rozwiązanie. Skorzystamy najpierw z kryterium d'Alemberta.

$$\frac{(x-3)^{n+1}}{(n+1)10^{n+1}} \frac{n 10^n}{(x-3)^n} = \frac{n+1}{10n}(x-3) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{(x-3)}{10},$$

a więc szereg jest zbieżny, gdy $|x-3| < 10$ oraz rozbieżny, gdy $|x-3| > 10$. Pozostaje sprawdzić dwa końce przedziału $(-7, 13)$. Gdy $x = 13$, to szereg przyjmuje postać $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ i jest rozbieżny. Natomiast gdy $x = -7$, to szereg przyjmuje postać $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ i jest zbieżny. Ostatecznie, szereg jest zbieżny dla $x \in [-7, 13)$. □

9.1.1. *Szeregi zespolone.* Pojęcia granicy ciągu i sumy szeregu można naturalnie przenieść na liczby zespolone w miejsce liczb rzeczywistych. W tej zamianie wartość bezwzględna zmienia się w moduł liczby zespolonej. Nie będziemy tutaj powtarzać całej teorii granic i szeregów, ale podsumujemy najważniejsze własności szeregów zespolonych $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$, gdzie $z_n = x_n + i y_n$.

Fakt 9.4

Własności szeregów zespolonych:

1. szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżne są oba szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$; wtedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + i \sum_{n=1}^{\infty} y_n,$$

2. jeśli $z_n \not\to 0$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ nie może być zbieżny (warunek konieczny),
3. zbieżne szeregi zespolone można dodawać, odejmować, mnożyć przez skalary,

$$\sum_{n=1}^{\infty} aw_n + bz_n = a\sum_{n=1}^{\infty} w_n + b\sum_{n=1}^{\infty} z_n,$$

4. zmiana skończonej liczby wyrazów nie wpływa na zbieżność szeregów,
5. jeśli szereg jest absolutnie zbieżny, tzn. $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| < \infty$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ też jest zbieżny.
6. kryteria Cauchy'ego i d'Alemberta zachodzą (badamy granice $|z_{n+1}/z_n|$ lub $\sqrt[n]{|z_n|}$),
7. Zespolony szereg potęgowy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ (gdzie $a_n, z, z_0 \in \mathbb{C}$) jest zbieżny dla $z = z_0$ albo $z \in \mathbb{C}$ albo zbieżny w kole $|z-z_0| < R$ i rozbieżny poza kołem $|z-z_0| > R$. Na okręgu $|z-z_0| = R$ może być w niektórych punktach zbieżny, a w innych rozbieżny.

Fakt 9.5 (Uogólnione kryterium Leibnitza-Dirichleta)
Jeśli (a_n) jest ciągiem dodatnim malejącym do zera, to zbieżne są szeregi

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) \qquad (x \neq 2k\pi),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx) \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{inx} \qquad (x \neq 2k\pi).$$

9.2. **Lista zadań.**

9.2.1. *Zadania.*

1. Wyznacz przedział zbieżności szeregów potęgowych:

(a) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n x^n}{n^{10}},$$

(b) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 10^{n-1}},$$

(c) $$\sum_{n=0}^{\infty} 50^n x^{2n+5},$$

(d) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)},$$

(e) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{\sqrt{n^2+n}-n},$$

(f) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n+5}x^{3n+7}}{n \cdot 6^{2n}},$$

(g) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!x^n}{(n!)^3},$$

(h) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+7}x^{6n}}{\sqrt{n}},$$

(i) $$\sum_{n=1}^{\infty} n!x^{2^n},$$

(j) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(54n+1)^n x^{3n}}{(81n+2)^n},$$

(k) $$\sum_{n=1}^{\infty} 10^{n^2} x^{n^3},$$

(l) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{3n}{n} x^n}{n^2},$$

(m) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{8^n \cdot n^8}{n^{10}+1} \cdot x^{3n},$$

(n) $$\sum_{n=1}^{\infty} \log^4 n\, x^n.$$

2. Oblicz promień zbieżności szeregu potęgowego

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^{n+7}$

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{4n}{n} x^n$

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^{n^2}$

(d) $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+10}{n} x^n$

(e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!(3n)!}{(2n)!(2n)!} x^n$

3. Oblicz sumy szeregów potęgowych:

(a)
$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n,$$

(b)
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n},$$

(c)
$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n.$$

4. Podaj przykład szeregu potęgowego o promieniu zbieżności 2 i sumie równej 7 dla $x = 1$.

5. Podaj przykład dwóch szeregów potęgowych o promieniach zbieżności 1, których suma jest szeregiem potęgowym o promieniu zbieżności 2.

6. Zbadaj zbieżność szeregów zespolonych:

(a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + in + 1},$$

(b)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3 + i},$$

(c)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + i},$$

(d)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+i}{n^2 + i}.$$

7. Wyznaczyć promienie/obszary zbieżności (w miarę możliwości) zespolonych szeregów potęgowych:

(a)
$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n,$$

(b)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8z^n}{n^2},$$

(c)
$$\sum_{n=1}^{\infty} nz^n,$$

(d)
$$\sum_{n=0}^{\infty} n! z^{n^2},$$

(e)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{6n}}{n}.$$

10. FUNKCJE: GRANICE I CIĄGŁOŚĆ

10.1. **Wprowadzenie.** W tym rozdziale rozważać będziemy funkcje określone na pewnej dziedzinie D_f (np.: prosta, półprosta, przedział, suma przedziałów, itp.). Interesować nas będą dwa, mocno ze sobą związane, pojęcia granicy funkcji i ciągłości funkcji.

Definicja 10.1 (Granica funkcji w punkcie)
Niech dana będzie funkcja $f : D_f \to \mathbf{R}$ oraz punkt $x_0 \in \mathbf{R}$. Mówimy, że funkcja f ma granicę g w

punkcie x_0, jeśli dla każdego ciągu (x_n), takiego że $x_n \in D_f$, $x_n \neq x_0$ zachodzi

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = g.$$

Jeśli powyższy warunek zachodzi, to zapisujemy to

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = g.$$

Intuicyjnie, jeśli $\lim_{x\to x_0} f(x) = g$, to "zbliżając się" z punktem x do x_0 wartości funkcji $f(x)$ "zbliżają się" do liczby g. Zauważmy, że punkt x_0 może nie należeć do dziedziny funkcji, ale definicja ma sens jedynie gdy istnieją ciągi punktów z dziedziny zbieżne do punktu x_0. Typowym przykładem może być punkt $x_0 = 1$, gdy dziedziną jest np. $(1,\infty)$ lub $(0,1)\cup(1,2)$. Zauważmy też, że nawet jeśli x_0 należy do dziedziny, to wartość $f(x_0)$ nie ma żadnego znaczenia dla powyższej definicji. Inaczej jest w definicji ciągłości - tutaj wartość $f(x_0)$ ma kluczowe znaczenie.

Definicja 10.2

Niech dana będzie funkcja $f : D_f \to \mathbf{R}$ oraz punkt $x_0 \in D_f$. Mówimy, że funkcja f jest ciągła w punkcie x_0, jeśli dla każdego ciągu (x_n), takiego że $x_n \in D_f$ zachodzi

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0).$$

Jak widać definicje te są mocno ze sobą związane. Można to zapisać w następującej formie.

Fakt 10.3

Niech f i $x_0 \in D_f$ będą jak wyżej. Wtedy f jest ciągła w punkie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim_{x\to x_0} f(x)$ istnieje i jest równa $f(x_0)$.

Czasem przy badaniu granic funkcji wygodne jest rozpatrzenie dwóch przypadków: gdy x-y dążą do x_0 "z prawej strony" (czyli $x > x_0$) oraz "z lewej strony" (czyli $x < x_0$). Jeśli w definicji 10.1 założymy, że ciągi $x_n \in D_f$ spełniają $x_n > x_0$ (alternatywnie $x_n < x_0$), to mówimy, że granica jest prawostronna (lewostronna) i zapisujemy to

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = g \qquad (\lim_{x\to x_0^-} f(x) = g).$$

Definicje Cauchy'ego.

10.2. **Lista zadań.**

10.2.1. *Zadania.*

1. Naszkicuj wykres funkcji f danej wzorem

(a) $\operatorname{sgn}(\sin x)$

(b) $\{x\} - (\{x\})^2$

(c) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x < 0 \\ x & \text{dla} \quad 0 \le x < 1 \\ -x^2 + 4x - 2 & \text{dla} \quad 1 \le x < 3 \\ 4 - x & \text{dla} \quad x \ge 3 \end{cases}$

(d) $f(x) = \begin{cases} x & \text{dla} \quad x \neq 2 \\ \operatorname{sgn}(x) & \text{dla} \quad x = 2 \end{cases}$

(e) $\dfrac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$

(f) $\dfrac{1}{\{x\}}$

(g) $\operatorname{sgn}(x^3 - x)$

(h) $x^3 \operatorname{sgn}(x)$

(i) $\left|\left[x + \frac{1}{2}\right] - x\right|$

(j) $f(x) = |x^2 - 1| - |x^2 - 4|$

(k) $f(x) = |x^2 - 8x + 15|$

(l) $f(x) = x^2 + x + 2 - |x^2 - x - 2|$

(m) $f(x) = \{\cos x\}$

(n) $f(x) = [\frac{4}{\pi}\operatorname{arctg} x]$

(o) $f(x) = 2\{\sin x\} - \{2\sin x\}$

(p) $f(x) = [x] + x$

(q) $f(x) = \{x\} + x$

(r) $f(x) = \left[\left|x - \frac{1}{2}\right|\right]$

2. Oblicz następujące granice:

(a) $$\lim_{x\to 7}\left(\frac{1}{x-7}-\frac{8}{x^2-6x-7}\right)$$

(b) $$\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$$

(c) $$\lim_{x\to 0} e^{-1/x^2}$$

(d) $$\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}$$

(e) $$\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x+2}$$

(f) $$\lim_{x\to 5}\frac{x^2-6x+5}{x-5}$$

(g) $$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)$$

(h) $$\lim_{x\to 1}\frac{x^{2008}-1}{x^{10}-1}$$

(i) $$\lim_{x\to 1/2}\frac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$$

(j) $$\lim_{x\to -2}\frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$$

(k) $$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

(l) $$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2-1}$$

(m) $$\lim_{x\to +\infty}\frac{x-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}$$

(n) $$\lim_{x\to +\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

(o) $$\lim_{x\to -\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

(p) $$\lim_{x\to 0+}\frac{\ln x}{1+\ln x}$$

(q) $$\lim_{x\to 0+}\frac{2^{1/x}+1}{2^{1/x}-1}$$

(r) $$\lim_{x\to 0-}\frac{2^{1/x}+1}{2^{1/x}-1}$$

(s) $$\lim_{x\to +\infty}\frac{2^{1/x}-1}{2^{1/x}+1}$$

3. Dla których wartości parametrów a, b funkcja f określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases} ax+b & \text{dla} \quad x<1 \\ x^2 & \text{dla} \quad 1\le x<2 \\ ax-b & \text{dla} \quad 2\le x \end{cases}$$

jest ciągła? Naszkicować wykres funkcji f dla każdej pary parametrów (a,b), dla których funkcja f jest ciągła.

4. Dla których wartości parametrów a, b funkcja f określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{dla} \quad x<1 \\ x^2+ax+b & \text{dla} \quad 1\le x<2 \\ x+3 & \text{dla} \quad 2\le x \end{cases}$$

jest ciągła? Naszkicować wykres funkcji f dla każdej pary parametrów (a,b), dla których funkcja f jest ciągła.

5. Do podanych f, x_0 i ε dobrać takie δ, aby

$$\forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta) \qquad |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

(a) $f(x)=2x$, $x_0=5$, $\varepsilon=1/10$
(b) $f(x)=1/x$, $x_0=4$, $\varepsilon=1/100$
(c) $f(x)=x^2$, $x_0=1$, $\varepsilon=1/50$

(d) $f(x)=x^3$, $x_0=0$, $\varepsilon=1/1000$
(e) $f(x)=\sqrt{x}$, $x_0=30$, $\varepsilon=1/10$
(f) $f(x)=x^4$, $x_0=10$, $\varepsilon=10^{-10}$

6. Wskaż taką liczbę M, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność

$$|f(x)|\le M\,.$$

(a)
$$f(x)=\frac{2x^4+13x^2+7}{5x^4+x^2+2}$$

(b)
$$f(x)=\frac{5x^4+x^2+2}{2x^4+13x^2+7}$$

(c)
$$f(x)=e^{\sin x}$$

(d)
$$f(x)=\frac{x}{x^4+3}$$

(e)
$$f(x)=\frac{x^{1000}}{2^{|x|}}$$

10.2.2. *Problemy.*

11. RACHUNEK RÓŻNICZKOWY

11.1. **Wprowadzenie.** Dana jest funkcja f oraz punkt x należący do dziedziny f wraz z pewnym przedziałem $(x-\delta,x+\delta)$. Pochodną funkcji f w punkcie x nazywamy granicę

$$f'(x)=\lim_{y\to x}\frac{f(y)-f(x)}{y-x}, \tag{11.1}$$

o ile ta granica istnieje. W przeciwnym wypadku mówimy, że pochodna nie istnieja w punkcie x. Wprowadzając podstawienie $y=x+h$ możemy pochodną liczyć w podobny sposób

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(f(x+h)-f(x)).$$

Zauważmy, że pochodna w każdym punkcie jest liczbą (równą tangensowi nachylenia stycznej do osi Ox), więc jeśli rozważymy pochodną we wszystkich punktach, w których ona istnieje, to dostaniemy nową funkcję $f'(x)$ z funkcji $f(x)$.

Przykład 11.1
Dla $f(x)=x^2$ policzymy $f'(7)$, a następnie $f'(x)$ dla dowolnego x.

Rozwiązanie. Mamy

$$f'(7)=\lim_{x\to 7}\frac{x^2-49}{x-7}=\lim_{x\to 7}(x+7)=14.$$

oraz

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}(2x+h)=2x.$$

□

Jeśli zdarzy się, że funkcja jest określona w punkcie x i tylko z jednej strony tego punktu (np. $\sqrt{x}$ w $x=0$) lub granica (11.1) istnieje tylko jako granica jednostronna, to mówimy o pochodnych jednostronnych. Tak więc jeśli f jest określona na $[x,x+\delta)$, to jej pochodna prawostronna jest dana wzorem

$$f'(x^+)=\lim_{y\to x^+}\frac{f(y)-f(x)}{y-x},$$

o ile ta granica istnieje.

Intuicyjnie pochodna $f'(x)$ mówi o tym jak szybko funkcja rośnie/maleje w punkcie x. Jeśli w pewnym punkcie x pochodna $f'(x)$ wynosi a to oznacza, że funkcja rośnie/maleje tak jak funkcja liniowa $y = ax$. Przy okazji zauważmy, że funkcja liniowa $f(x) = ax$ ma w każdym punkcie pochodną równą a.

Fakt 11.2 (Pochodne podstawowych funkcji)
Niech x będzie zmienną oraz $a \in \mathbb{R}$. Zachodzą następujące wzory:

$$\begin{aligned}
&(x)' = 1,\\
&(x^a)' = ax^{a-1},\\
&(\sin x)' = \cos x,\\
&(\cos x)' = -\sin x,\\
&(\ln x)' = \frac{1}{x},\\
&(e^x)' = e^x.
\end{aligned}$$

Dowód. Pierwszy wzór jest oczywisty. Drugi wzór działa dla dowolnego $a \in \mathbb{R}$ (ujemne, ułamkowe, niewymierne), ale my pokażemy dowód dla $a \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^k h^{n-k} = \lim_{h\to 0} \left(\binom{n}{n-1} x^{n-1} + h(\ldots) \right) = nx^{n-1}.$$

Przejdźmy do pochodnej sinusa. Ze wzoru na sinus sumy, używając znanych granic trygonometrycznych,

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0} \left(\sin x \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \frac{\sin h}{h} \right) = \cos x.$$

Podobnie postępujemy z cosinusem. Następnie, dla $x > 0$,

$$\lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h\to 0} \ln \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{1/h} = \lim_{h\to 0} \ln \left(\left(1 + \frac{1}{x/h}\right)^{x/h} \right)^{1/x} = \ln e^{1/x} = 1/x.$$

I jeszcze:

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h\to 0} e^x \frac{e^h - 1}{h} = e^x.$$

□

Twierdzenie 11.3 (Arytmetyka pochodnych)
Niech f i g będą dwiema funkcjami różniczkowalnymi, a c stałą rzeczywistą.

1.
$$(cf(x))' = cf'(x),$$

2.
$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x),$$

3.
$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x),$$

4.
$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2},$$

5.
$$(g(f(x)))' = f'(g(x))g'(x).$$

Poniższy fakt zbiera wiele ważnych zastosowań pochodnej. Zanim go sformułujemy zauważmy jeszcze, że $f'(x)$ na każdym odcinku, na którym jest zdefiniowana jest funkcją, której pochodną również można policzyć (jeśli istnieje). W ten sposób mamy zdebiniowaną drugą pochodną $f''(x)$ (i dalsze, które oznaczamy $f^{(n)}(x)$). I jeszcze kilka definicji:

- *punktem ekstremalnym* nazywamy punkt x, w którym $f'(x) = 0$,
- *maximum (minimum) lokalnym* nazywamy punkt x_0, taki że $f(x) \leq f(x_0)$ ($f(x) \geq f(x_0)$) dla x-ów z pewnego otoczenia x_0 (czyli przedziału $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ i $\varepsilon > 0$),
- *ekstremum lokalnym* nazywamy punkt, który jest maximum lokalnym lub minimum lokalnym.

Fakt 11.4 (Własności pochodnych)
Zakładamy, że f jest funkcją zdefiniowaną na odcinku otwartym (lub sumie odcinków).

1. Funkcja różniczkowalna jest ciągła.
2. Styczna do wykresu funkcji f w punkcie x_0 zadana jest równaniem
$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$
3. Jeśli $f'(x) > 0$ ($f'(x) \geq 0$), to funkcja f jest rosnąca (niemalejąca).
4. Jeśli $f'(x) < 0$ ($f'(x) \leq 0$), to funkcja f jest malejąca (nierosnąca).
5. Jeśli $f'(x) = g'(x)$ na odcinku (a, b), to $f(x) = g(x) + c$ na tym odcinku.
6. Jeśli funkcja ma ekstremum lokalne w punkcie x_0, to x_0 jest punktem krytycznym ($f'(x_0) = 0$).
7. Jeśli $f''(x) > 0$ ($f''(x) \geq 0$), to funkcja f jest ściśle wypukła (wypukła).
8. Jeśli $f''(x) < 0$ ($f''(x) \leq 0$), to funkcja f jest ściśle wklęsła (wklęsła).

Jest naturalne, że punkty ekstremalne i punkty krytyczne są szczególnie interesujące. Pozwala to między innymi poznać przybliżony przebieg funkcji i rozwiązywać zagadnienia optymalizacyjne. Rozdział ten zakończymy jeszcze dwoma ważnymi twierdzeniami.

Twierdzenie 11.5 (Twierdzenie Rolle'a)
Niech $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą mającą pochodną w każdym punkcie przedziału (a, b) oraz $f(a) = f(b)$. Wtedy istnieje $t \in (a, b)$, takie że
$$f'(t) = 0.$$

Dowód. Załóżmy, że f spełnia założenia twierdzenia oraz, że nie jest stała. Wiemy, że funkcja ciągła na odcinku domkniętym $[a, b]$ przyjmuje swoje maksimum i minimum w pewnych punktach. Przynajmniej jedno z tych dwóch ekstremów musi być poza końcami, załóżmy bez straty ogólności, że maksimum jest w punkcie $t \in (a, b)$. Wiemy, że pochodna $f'(t)$ istnieje, więc granica
$$\lim_{x \to t} \frac{f(x) - f(t)}{x - t} = C$$
dla pewnej liczby C. Skoro t jest punktem maksimum, to zawsze $f(x) - f(t) \leq 0$. Rozważmy teraz tylko $x > t$. Dla takich x iloraz różnicowy jest niedodatni, więc i pochodna prawostronna jest niedodatnia. Podobnie, rozważając $x < t$, pochodna lewostronna jest nieujemna. Ale przecież pochodna istnieje, więc musi być $f'(t) = 0$. □

Twierdzenie 11.6 (Twierdzenie Lagrange'a)
Niech $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą mającą pochodną w każdym punkcie przedziału (a, b). Wtedy istnieje $t \in (a, b)$, takie że
$$f'(t) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Dowód. Rozważmy funkcję pomocniczą

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

Ta funkcja spełnia założenia twierdzenia Rolle'a (jest ciągła na $[a,b]$ oraz różniczkowalna na (a,b)) oraz $g(a) = g(b)$ (sprawdź). Zatem istnieje $t \in (a,b)$ takie, że $g'(t) = 0$. Teraz wystarczy zauważyć, że dla $x \in (a,b)$ mamy

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

co daje tezę twierdzenia w punkcie t. □

11.2. **Lista zadań.**

11.2.1. *Ćwiczenia.*

1. Niech $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$. Korzystając **z definicji** pochodnej obliczyć $f'(8)$.
2. Niech $f(x) = x^5$. Korzystając **z definicji** pochodnej wyprowadzić wzór na $f'(x)$.
3. Korzystając **z definicji** pochodnej wyprowadzić wzór na pochodną funkcji
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$
4. Oblicz pochodną funkcji o podanym wzorze. Na jakim zbiorze pochodna istnieje?

(a) $$\frac{1-x^3}{1+x^3},$$
(b) $$(x^5+1)^{20},$$
(c) $$\frac{1}{\sqrt{1-x^4-x^8}},$$
(d) $$\operatorname{sgn}(x^5-x^3),$$
(e) $$2^{x+3},$$
(f) $$x^2(x+1)e^x,$$
(g) $$e^{e^x},$$
(h) $$\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10},$$

11.2.2. *Zadania.*

1. Podać (z wyprowadzeniem i uzasadnieniem poprawności) przykład takiego wielomianu $W(x)$ stopnia trzeciego o współczynnikach całkowitych, że funkcja $f(x) = W(\{x\})$ jest różniczkowalna.
2. Niech
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1+2xe^x-e^{2x}}{x^3} & \text{dla} \quad x \neq 0 \\ A & \text{dla} \quad x = 0 \end{cases}.$$
Dla której wartości parametru A istnieje $f'(0)$ i ile jest równa?
3. Znajdź największą i najmniejszą wartość funkcji $x^3 + 3|x| + 2$ na przedziale $[-1,1]$.
4. Załóżmy, że $|f'(x)| \leq M$ dla $x \in (a,b)$. Korzystając z twierdzenia Lagrange'a pokaż, że $|f(b)-f(a)| \leq M(b-a)$, czyli
$$f(a) - M(b-a) \leq f(b) \leq f(a) + M(b-a).$$
5. Korzystając z poprzedniego zadania oszacuj liczby: $\sqrt{101}$, $28^{2/3}$, $33^{1/5}$.

6. Załóżmy, że wielomian $P(x)$ stopnia n ma maksymalnie dużo, czyli n pierwiastków rzeczywistych. Pokaż, że pochodne P też mają tę własność.

7. Liczby rzeczywiste $c_0, c_1, ..., c_n$ spełniają zależność

$$c_0 + \frac{c_1}{2} + ... + \frac{c_n}{n+1} = 0.$$

Pokaż, że wielomian $c_n x^n + ... + c_1 x + c_0$ ma przynajmniej jeden pierwiastek pomiędzy 0 i 1.

8. Wykaż nierówności

$$\cos x > 1 - \frac{x^2}{2} \quad (x \neq 0).$$

$$\sin x > x - \frac{x^3}{6} \quad (x > 0).$$

$$e^x \geq \left(\frac{ex}{n}\right)^n \quad (x \geq 0).$$

9. Niech R będzie prostokątem leżącym w pierwszej ćwiartce, którego podstawa leży na osi OX, jeden z wierzchołków znajduje się w początku układu, a przeciwny wierzchołek leży na wykresie funkcji $y = e^{-x}$.

(a) Pokazać, że dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ pole R jest mniejsze niż ε, jeśli podstawa prostokąta jest odpowiednio duża.

(b) Pokazać, że prostokąt o największym możliwym polu ma podstawę równą 1.

10. Trójkąt prostokątny T leży w pierwszej ćwiartce. Przyprostokątne znajdują się na osiach, a przeciwprostokątna jest styczna do wykresu $y = e^{-x}$.

(a) Pokazać, że dla $\varepsilon > 0$ pole trójkąta T jest mniejsze niż ε jeśli podstawa jest odpowiednio duża.

(b) Pokazać, że podstawa trójkąta o największym polu jest równa 2.

12. WZÓR TAYLORA

12.1. **Wprowadzenie.** Przypomnijmy, że szereg potęgowy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ jest zbieżny na przedziale $(x_0 - R, x_0 + R)$ oraz rozbieżny poza domknięciem tego przedziału (będziemy rozważać tylko przypadki, gdy $R > 0$). Definiuje on zatem funkcję na tym przedziale (być może również na końcach). Okazuje się, że takie funkcje mają bardzo dobre własności, np. są zawsze różniczkowalne nieskończenie wiele razy. Dla uproszczenia będziemy przyjmować $x_0 = 0$ (wszystkie inne szeregi potęgowe są tylko przesunięciem takich).

Fakt 12.1 (Szeregi potęgowe)
Niech dana będzie funkcja $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ dla $x \in (-R, R)$, gdzie $R > 0$ jest promieniem zbieżności szeregu. Wtedy:

1. $f(x)$ jest ciągła na przedziale $(-R, R)$,

2. $f'(x)$ istnieje na tym samym przedziale $(-R, R)$ oraz

$$f'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}.$$

3. Jeśli $f(x)$ jest zbieżna w którymś z końców, to jest ciągła (jednostronnie) w tym końcu.

Mogło by się wydawać, że taki sposób zadawania funkcji nie jest specjalnie użyteczny - w końcu ciężko poznać dokładną wartość szeregu. A jednak, okaże się, że jest to podstawowy sposób określania większości znanych nam funkcji (wielomiany, f. trygonometryczne, wykładnicze, potęgowe, logarytmy). Jednym z zastosowań jest np. wyznaczanie wartości funkcji trygonometrycznych z zadaną dokładnością. A wszystko to dzięki następującemu twierdzeniu.

Twierdzenie 12.2 (Wzór Taylora)
Załóżmy, że funkcja f jest zdefiniowana na przedziale $(x_0 - r, x_0 + r)$ oraz jej pochodne do rzędu $n+1$ istnieją. Niech h będzie takie że $|h| < r$. Wtedy

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}h^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + R_{n+1},$$

gdzie

$$R_{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta h)}{n!}h^n$$

oraz h jest pewną liczbą z przedziału $(0,1)$.

Uwagi:

- O x_0 i h myślimy odpowiednio jako o punkcie statowym (gdzie znamy funkcję) i przesunięciu.
- R_{n+1} jest resztą, czyli czymś, co ma być stosunkowo małe. Wobec tego suma występująca przed R_{n+1} jest przybliżeniem stopnia n.
- Dla $n = 1$ mówimy o aproksymacji liniowej (styczna), $n = 2$ kwadratowej (styczna parabola), itd.
- Wzór na R_{n+1} pozwala oszacować błąd (trzba jedynie uważać na ξ o którym wiemy jedynie do jakiego przedziału należy).
- Jeśli podstawimy $x = x_0$ i $y = x_0 + h$ to dostajemy przeformułowany wzór

$$f(y) = f(x) + f'(x)(y-x) + \frac{f''(x)}{2!}(y-x)^2 + \frac{f^{(3)}(x)}{3!}(y-x)^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(y-x)^n + R_{n+1}.$$

- Reszta R_{n+1} zależy zarówno od x_0 jak i h.
- Jeśli $x_0 = 0$, to wzór Taylora zwyczajowo nazywa się wzorem Maclaurina.

Może się zdarzyć, że dla pewnej funkcji f, punktu x_0 i niektórych h (np. h z przedziału $(-R,R)$) reszty R_{n+1} dążą do zera (gdy $n \to \infty$ oraz x_0 i h są ustalone). Wtedy dostajemy przedstawienie funkcji f w postaci szeregu potęgowego:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}h^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n.$$

Dla przykładu podamy wzory na kilka znanych funkcji (wzory te będą do wyprowadzenia i uzasadnienia w zadaniach).

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots \qquad x \in (-1,1)$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots \qquad x \in (-1,1)$$

12.2. **Lista zadań.**

12.2.1. *Ćwiczenia.*

1. Zapisz wzór Taylora rzędu n w punkcie x_0 dla funkcji f, gdy
- (a) $f(x) = x^3 + x + 5$, $n = 5$, $x_0 = 2$,
- (b) $f(x) = \frac{1}{x}$, $n = 10$, $x_0 = 3$,
- (c) $f(x) = \mathrm{tg}\, x$, $n = 3$, $x_0 = 0$,
- (d) $f(x) = e^x \sin x$, $n = 3$, $x_0 = 0$.

2. Znajdź wzór na $f^{(n)}(0)$ i zapisz wzór Taylora z resztą dla funkcji: $(1-x)^{-1}$, $\sin x$, $\cos x$, e^x, $\ln(1+x)$.

3. Uzasadnij, że dla ustalonego x reszta we wzorach Taylora z poprzedniego zadania zbiega do zera. Dla funkcji $(1-x)^{-1}$ oraz $\ln(1+x)$ załóż, że $|x| < 1/2$. W pozostałych przypadkach $x \in \mathbb{R}$.

4. Znajdź rozwinięcie w szereg Maclaurina funkcji $f(x) = x^2 \sin x$. Następnie, wyznacz $f^{(2015)}(0)$.

5. Oblicz sumę $\sum_{n=1}^{\infty} n 2^{-n}$.

6. Wykorzystując wzór Taylora dla $f(x) = \ln(1+x)$, $x_0 = 0$, $h = 1$, $n = 5$ wyznacz przybliżenie liczby $\ln 2$. Oszacuj jaki jest popełniony błąd. Jak duże n trzeba dobrać, by błąd był mniejszy niż 10^{-6}.

12.2.2. *Zadania.*

1. Znajdź rozwinięcie Taylora funkcji $(1+x)^\alpha$, gdzie $\alpha \in \mathbb{R}$. Dla jakich x szereg jest zbieżny? Czy szereg Taylora jest równy wyjściowej funkcji?

2. Znajdź szereg Taylora w punkcie a dla funkcji:

$$\sin(2x)\ \ (a = 0), \qquad \ln(3x)\ \ (a = 1), \qquad \cos^2(x)\ \ (a = \pi), \qquad x\ln(1+x^2)\ \ (a = 0).$$

3. Rozwiń w szereg Taylora funkcję $f(x) = \frac{x}{x+1}$ w punkcie $x = 2$ do rzędu $n = 3$ (czy potrafisz podać pełen szereg?).

4. Znajdź rozwinięcie w szereg Maclaurina funkcji $f(x) = x^2 \sin x^3$. Następnie, wyznacz $f^{(2015)}(0)$.

5. Oblicz sumy:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n(n-1)(n-2)}{5^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 3^n}{4^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n 2^{2n+1}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 2^n}.$$

6. Podaj przybliżenie $\cos(0,2)$ korzystając ze wzoru Taylora funkcji $\cos(x)$ rzędu 6 w punkcie $x = 0$. Oszacuj resztę (błąd przybliżenia).

7. Podaj przybliżenie liczby a z dokładnością d, gdy

(a) $a = e$, $d = 10^{-8}$,

(b) $a = \ln(1,1)$, $d = 10^{-2}$,

(c) $a = \sin 1^o$, $d = 10^{-6}$,

(d) $a = \sqrt{5}$, $d = 10^{-4}$.

8. Rozwiń funkcję $\ln(1 + x + x^2)$ w szereg Maclaurina.

13. DODATEK 1: LICZBY ZESPOLONE

13.1. **Wprowadzenie.** Liczba zespolona z, to para liczb rzeczywistych (a, b). Zapisujemy ją

$$z = a + bi.$$

Liczbę i nazywamy *jednostką urojoną*.

Liczby zespolone dodajemy naturalnie, a mnożymy tak, że $i^2 = -1$, tzn.

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Elementem neutralnym dodawania (zerem), jest $0 = 0 + 0i$, a mnożenia (jedynką) $1 = 1 + 0i$. Liczbę $a = \Re(z)$ z przedstawienia $z = a + bi$ nazywamy częścią rzeczywistą, a liczbę $b = \Im(z)$ (nie bi) - częścią urojoną.

Sprzężenie liczby z to $\bar{z} = a - bi$. Moduł, to odległość pary $z = a + bi \sim (a, b)$ od początku układu na płaszczyźnie, tzn. $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Każdy element $z = a + bi$ ma przeciwny $-z = -a - bi$ oraz każdy element niezerowy ma odwrotny

$$z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

Zachodzą wszystkie prawa działań znane dla liczb rzeczywistych, m.in. dodawanie i mnożenie są przemienne oraz łączne. Zachodzi prawo rozdzielności.

Liczby zespolone mają interpretację geometryczną. Rozważmy liczbę $z = a + bi$. Wyciągając przed nawias jej moduł, mamy: $z = |z|(a' + b'i)$, gdzie $a' = \frac{a}{|z|}, b' = \frac{b}{|z|}$ oraz $a' + b'i$ jest w odległości 1 od zera. Wszystkie takie liczby można zapisać, jako $\cos(\phi) + i \sin(\phi)$. Ostatecznie dostajemy:

Fakt 13.1 (Postać trygonometryczna)
Każda liczba zespolona $z \in \mathbb{C}$ jest postaci $z = r(\cos(\phi) + i \sin(\phi))$, gdzie $r = |z|$, zaś ϕ to kąt pomiędzy osią $0X$, a odcinkiem $0z$. Ponadto jeśli $z_1 = r_1(\cos(\phi_1) + i \sin(\phi_1))$, oraz $z_2 = r_2(\cos(\phi_2) + i \sin(\phi_2))$, to $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 (\cos(\phi_1 + \phi_2) + i \sin(\phi_1 + \phi_2))$. Dodatkowo $e^{i\phi} = \cos(\phi) + i \sin(\phi)$.

Definicja 13.2
Pierwiastkiem stopnia $n \in \mathbb{N}$ z liczby zespolonej z nazywamy każdą liczbę zespoloną w taką, że $w^n = z$. (uwaga: oznaczenie $\sqrt[n]{z}$ nie jest jednoznaczne!)

Twierdzenie 13.3 (Zasadnicze twierdzenie algebry)
Niech $P(z) = a_n z^n + ... + a_0 z^0$, gdzie $a_n, a_{n-1} ..... a_0 \in \mathbf{C}$. Wtedy istnieje $w \in \mathbf{C}$ takie, /ze $P(w) = 0$. W konsekwencji wielomian zespolony stopnia n ma n pierwiastków zespolonych (licząc z krotnościami).

Wniosek 13.4
Każdy wielomian o współczynnikach rzeczywistych rozkłada się na czynniki liniowe o współczynnikach zespolonych.

Wniosek 13.5
Każdy wielomian o współczynnikach rzeczywistych rozkłada się na czynniki stopnia 1 i 2 (liniowe i kwadratowe) o współczynnikach rzeczywistych.

13.2. Lista zadań.

13.2.1. *Ćwiczenia.*

1. Podaj część rzeczywistą, urojoną, moduł, sprzężenie, liczbę przeciwną i odwrotną do liczby zespolonej:

$$a)2i, \qquad b) -1+7i, \qquad c) -5-3i.$$

2. Wykonaj działania:

$$a)(5-(6+4i))-(3+2i)(3-2i), \qquad b)(2-i)^3,$$

$$c)\frac{3-i}{1+2i}, \qquad d)\frac{1+2i}{i^{2011}}, \qquad e)\frac{(\sqrt{3}+i)(2+i)}{3-4i}.$$

$$(1-3i)\cdot(2+5i)-5-6i, \qquad (1+i)^3, \qquad (a+bi)\cdot(c+di).$$

$$a)(2-i)(3+2i)-5i, \qquad b)(5-(6+4i))-(3+2i)(3-2i), \qquad c)(2-i)^3,$$

$$d)\frac{3-i}{1+2i}, \qquad e)\frac{5+3i}{5-3i}\frac{9i-15}{2i+7}, \qquad f)\frac{1+2i}{i^{2011}}, \qquad g)\frac{(\sqrt{3}+i)(2+i)}{3-4i}.$$

3. Oblicz i^n dla $n \in \mathbb{Z}$.
4. Uzasadnij, że jeśli $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = 0$, to jedna z liczb z_i jest zerem.
5. Policz $z^{-1} = \frac{1}{z}$ dla liczb: $z = 5,\ 4i,\ 1+i,\ 4-5i,\ i-16$.
6. Udowodnij prawo rozdzielności: $(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_1 \cdot z_3$.
7. Znajdź z, gdy $iz + 5 - 2i = 3z - 4i$.
8. Rozwiąż równania:

$$a)|z|^2 - z = 4-2i, \quad b)|z| - z = 3+2i, \quad c)|z| = -\overline{z}, \quad d)i(z+\overline{z})+3 = 2i - i(z-\overline{z}).$$

9. Udowodnij wzory:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \qquad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}.$$

10. Zapisz w postaci trygonometrycznej liczby: $a)17, \quad b)-i,$

$$c) -6+6i, \quad d)\sqrt{2}+\sqrt{6}i, \quad e)\sqrt{3}-i, \quad f)1-\sin(\alpha)+i\cos(\alpha)\ (0<\alpha<\pi/2).$$

11. Zaznacz na płaszczyźnie wektory $1+3i$ oraz $2-i$. Potem policz ich sumę i iloczyn i również zaznacz na płaszczyźnie. Dodaj i pomnóż te dwie liczby geometrycznie?

13.2.2. *Zadania.*

1. Udowodnij wzory:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \qquad z_1 \bar{\cdot} z_2 = \bar{z_1} \cdot \bar{z_2}.$$

2. Uzasadnij nierówności:

$$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|, \qquad |z_1 - z_2| \ge \big||z_1| - |z_2|\big|.$$

3. Rozwiąż równania kwadratowe w zmiennych zespolonych: $a) z^2 - 5z + 6$

$$b) z^2 + 1 = 0, \quad c) z^2 + 2z + 2 = 0, \quad d) z^2 - z + 1, \quad e) z^2 + z(i-4) + 5 + i = 0.$$

4. Znajdź wszystkie liczby zespolone, które spełniają równania kwadratowe:

$$a) z^2 - 5z + 6 = 0, \quad c) z^2 + 2z + 2 = 0, \quad d) z^2 - z + 1, \quad e) z^2 + z(i-4) + 5 + i = 0.$$

5. Rozwiąż równania:

$$a)\ 1 - i + \frac{1}{2z} = 3i, \quad b) |z|^2 - z = 4 - 2i, \quad c) |z| - z = 3 + 2i, \quad d) |z| = -\bar{z}, \quad e) i(z+\bar{z}) + 3 = 2i - i(z - \bar{z}).$$

6. Znajdź wszystkie liczby zespolone z, dla których $\overline{z} = z^2$.

7. Narysuj figurę złożoną z punktów, które spełniają warunek (-ki):

$$a) \mathscr{R}e(z) = 5/2, \quad b) |z| = 1, \quad c) |z-2| = 3, \quad d) |z - i + 4| = 9,$$

$$e) \mathscr{I}m(z) \in [-1, 4)\ i\ \mathscr{R}e(z) < 7, \quad f) |z| + \mathscr{R}e(z) < 1, \quad g) \mathscr{R}e(1/z) = 2,$$

$$h) |z-1| = |z+2|, \quad i) |z - i| \ge |z + 1 - 3i|, \quad j) \big||z - 2i| - |z + 2i|\big| = 4.$$

8. Wywnioskuj nierówności (geometrycznie lub algebraicznie):

$$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|, \qquad |z_1 - z_2| \ge \big||z_1| - |z_2|\big|.$$

9. Wymnóż dwie liczby zespolone zapisane w postaci trygonometrycznej, tzn.

$$[r_1(\cos(\phi_1) + i\sin(\phi_1))] \cdot [r_2(\cos(\phi_2) + i\sin(\phi_2))].$$

10. Iterując formułę z poprzedniego zadania wyprowadź wzór de Moivre'a:

$$z^n = [r(\cos(\phi) + i\sin(\phi)]^n = r^n(\cos(n\phi) + i\sin(n\phi)).$$

11. Jak zapisać liczbę odwrotną do liczby w postaci trygonometrycznej? Jak zatem dzieli się dwie liczby w tej postaci?

12. Oblicz $(1+i)^{1000}$.

13. Oblicz: $\quad a)(\sqrt{3} - 3i)^6, \quad b)(2-2i)^{17},$

$$c)\left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}\right)^{40}, \quad d)(\cos(33^o) + i\sin(33^o))^1 0, \quad e)\frac{(1+i)^2 2}{(1 - i\sqrt{3})^6}.$$

14. Oblicz wszystkie pierwiastki:

$$a)\sqrt{2}, \quad b)\sqrt{i}, \quad c)\sqrt{1+i}, \quad d)\sqrt[3]{-1}, \quad e)\sqrt[4]{2 - i\sqrt{12}}, \quad f)\sqrt[6]{1+i}, \quad g)\sqrt[4]{-16}.$$

15. Wyraź $\sin(3\theta)$ jako funkcję $\sin\theta$. Podobnie z $\cos(3\theta), \sin(4\theta)$.

16. Rozłóż na czynniki wyrażenie:

$$x^4 + 4.$$

Podpowiedź: rozwiąż równanie $z^4 + 4 = 0$

17. Rozłóż na czynniki stopnia 1 i 2 wielomiany:

$$x^4 - 5x^3 + 10x^2 - 20x + 24, \quad x^4 + 64, \quad x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 2.$$

Wskazówka: w ostatnim przykładzie zauważ, że wielomian w punkcie i jest równy zero.

18. Udowodnij, że w równoległoboku przekątne przecinają się w połowie długości.

19. Udowodnij, że w trójkącie środkowe przecinają się w punkcie, który dzieli je w stosunku $2:1$.

20. Na każdym boku czworokąta wypukłego zbudowano kwadrat. Wykaż, że odcinki, które łaczą śdorki przeciwległych kwadratów są wzajemnie prostopadłe i tej samej długości.

21. Na bokach AB i AC trójkąta ABC zbudowano, po jego zewnętrznej stronie, kwadraty $ABDE$ i $ACFG$. Punkty M i N są odpowiednio środkami odcinków DG i EF . Wyznacz możliwe wartości wyrażenia $MN : BC$.

22. Dane są punkty B i C. Punkt A jest dowolnym punktem ustalonej półpłaszczyzny wyznaczonej przez prostą BC. Na bokach trójkąta ABC zbudowano, na zewnątrz, kwadraty $ABDE$ i $ACFG$. Wykaż, że wszystkie tak otrzymane proste DF przechodzą przez pewien ustalony punkt, zależny tylko od położenia B i C .

23. Trójkąty równoboczne A_1B_1C, A_2B_2C i A_3B_3C są zorientowane antyzegarowo. Punkty M_1, M_2 i M_3 są środkami odpowiednio odcinków A_2B_3, A_3B_1 i A_1B_2. Udowodnij, że trójkąt $M_1M_2M_3$ jest równoboczny i zorientowany zegarowo.

24. Trójkąty $A_1A_2A_3$ i $B_1B_2B_3$ i $A_kB_kC_k$ dla $k = 1,2,3$ są równoboczne i zorientowane antyzegarowo. Wykaż, że trójkąt $C_1C_2C_3$ także spełnia te warunki.

25. Niech $A = (3,1)$, $B = (3,-1)$, $C = (7,-1)$, $D = (1,1)$ i $O = (0,0)$.
Oblicz $\measuredangle AOB + \measuredangle COD$.

26. Na bokach dowolnego trójkąta zbudowano, na zewnątrz, trójkąty równoboczne. Udowodnij, że ich środki tworzą trójkąt równoboczny.

27. Niech $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$. Wykazać, że na to, żeby liczby z_1, z_2, z_3 były wierzchołkami trójkąta równobocznego potrzeba i wystarcza, by $z_1 + z_2 + z_3 = 0$

28. Wykazać, że jeżeli środek ciężkości i środek koła opisanego na trójkącie pokrywają się, to trójkąt jest równoboczny.

13.2.3. *Problemy.*

1. Rozwiązać równanie
$$\left(1+\frac{1}{z}\right)^3 = i$$

2. Rozwiąż, względem niewiadomej z, równanie
$$az + b\overline{z} = c$$
dla $a,b,c \in \mathbb{C}$

3. Zbadaj zbiór punktów $\{z \mid A|z|^2 - \overline{B}z - B\overline{z} + C = 0\}$ gdzie $A \neq 0$, A, C są rzeczywiste i $|B|^2 > AC$.

4. Dla wielomianu $W(x)$ o współczynnikach rzeczywistych wiadomo, że: $W(1) = 17$, $W(-1) = 13$, $W(i) = 1+i$, $W(-i) = 4-5i$. Policz sumę współczynników przy potęgach dających resztę 3 z dzielenia przez 4.

5. Uzasadnij, że pierwiastków zespolonych stopnia k z liczby z jest co najwyżej k.

6. Udowodnij, że $\left|\frac{z-i}{z+i}\right| < 1 \Leftrightarrow Im(z) > 0$. Zinterpretuj geometrycznie.

7. Oblicz sumę i iloczyn wszystkich pierwiastków stopnia n z 1.

8. Udowodnij, że jeśli $\mathrm{Im}(z) = 0$, to $\left|\frac{z-i}{z+i}\right| = 1$.

9. Wyznacz liczby zespolone odpowiadające parze przeciwległych wierzchołków kwadratu, jeśli pozostałym dwu wierzchołkom odpowiadają liczby z oraz w.

10.
- Zapisz w postaci $a + bi$ ($a,b \in \mathbf{R}$) iloczyn $(2+i)(5+i)(8+i)$,

- o kątach α, β, γ wiadomo, że $0 < \alpha, \beta, \gamma < \frac{\pi}{2}$ oraz że $\mathrm{tg}\alpha = \frac{1}{2}$, $\mathrm{tg}\beta = \frac{1}{5}$, $\mathrm{tg}\gamma = \frac{1}{8}$. Oblicz $\alpha + \beta + \gamma$.

11. Udowodnij, że jeśli P jest wielomianem rzeczywistym przyjmującym tylko wartości dodatnie, to istnieją wielomiany rzeczywiste Q, R takie, że $P(x) = Q(x)^2 + R(x)^2$.

12. Powołując się wyłącznie na liczby zespolone, zapisz $(a^2+b^2)(c^2+d^2)$ jako sumę dwóch kwadratów.

13. * $P(x) = x^5 - 5x^3 + 4x + c$, $c \in \mathbf{R}$. Zakładamy, że ma pięć pierwiastków rzeczywistych x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. Niech: $Q(x) = (x-x_1^2)(x-x_2^2)(x-x_3^2)(x-x_4^2)(x-x_5^2)$ Ile wynosi suma modułów współczynników wielomianu $Q(x)$?

14. * Niech a, b będą liczbami rzeczywistymi. Rozważmy funkcje $f(x) = ax + b|x|$ oraz $g(x) = ax - b|x|$. Wykazać, że jeśli $f(f(x)) = x$ dla każdej liczby rzeczywistej x, to również $g(g(x)) = x$ dla każdej liczby rzeczywistej x.

15. * Znaleźć wszystkie wielomiany W o współczynnikach rzeczywistych, mające następującą własność: jeśli $x + y$ jest liczbą wymierną, to $W(x) + w(y)$ jest liczbą wymierną .

16. Pokaż, że $\sum_{k\geq 0}(-1)^k\binom{n}{2k} = 2^{1/n}\cos(\frac{n\pi}{4})$.

17. Pokaż, że $\cos(\frac{\pi}{11}) + \cos(\frac{3\pi}{11}) + \cdots + \cos(\frac{9\pi}{11}) = \frac{1}{2}$.

18. Wyznacz liczby zespolone odpowiadające parze przeciwległych wierzchołków kwadratu, jeśli pozostałym dwóm wierzchołkom odpowiadaja liczby z oraz w.

19. Opisz geometrycznie przekształcenie płaszczyzny $z \to iz$.

20. Udowodnij, że $|\frac{z-i}{z+i}| < 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\Im(z) > 0$. Zinterpretuj geometrycznie.

21. Pokaż Ptomeleusza: $ABCD$ jest czworokątem wypukłym. Wówczas $|AC| \cdot |BD| \leq |AB| \cdot |CD| + |AD| \cdot |BC|$, a równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg.

22. Przedstaw $\cos(x) + \cos(3x) + \cdots + \cos((2n-1)x)$ w postaci iloczynu.

23. Pięciokąt foremny wpisujemy w okrąg, a następnie wybieramy pewien punkt p na tym okręgu, który nie jest wierzchołkiem. Pokaż, że suma kwadratów długości odcinków łączących punkt p z wierzchołkami pięciokąta jest niezależna od wyboru punktu p.

24. Pokaż, że $(a^2+b^2)(c^2+d^2)$ jest sumą dwóch kwadratów.

25. Niech $W(x)$ będzie wielomianem takim, że dla każdej liczby rzeczywistej x mamy $W(x) \geq 0$, Pokaż, że istnieją wielomiany P, Q takie, że $W(x) = P^2(x) + Q^2(x)$.

26. Znaleźć wszystkie liczby zespolone z, dla których $\overline{z} = z^2$.

27. Niech $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$. Wykazać, że na to, żeby liczby z_1, z_2, z_3 były wierzchołkami trójkąta równobocznego potrzeba i wystarcza, by $z_1 + z_2 + z_3 = 0$

28. Wykazać, że jeżeli środek ciężkości i środek koła opisanego na trójkącie pokrywają się, to trójkąt jest równoboczny.

29. Rozwiązać równanie

$$\left(1 + \frac{1}{z}\right)^3 = i$$

30. Rozwiązać, względem niewiadomej z, równanie

$$az + b\overline{z} = c$$

dla $a, b, c \in \mathbb{C}$

31. Iloczyn wszystkich zbiorów domkniętych i wypukłych zawierających zbiór A nazywamy *otoczką wypukłą* zbioru A i oznaczamy symbolem $conv(A)$. Wykazać, że

$$conv\{z_1; z_2; \ldots; z_n\} = \left\{ \sum_{k=1}^{n} m_k z_k \;\middle|\; \sum_{k=1}^{n} m_k = 1, m_k \geq 0 \right\}$$

32. Wykazać, że gdy dla pewnego ζ mamy

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\zeta - z_k} = 0$$

to $\zeta \in conv\{z_1; z_2; \ldots; z_n\}$

33. Udowodnić Twierdzenie Gaussa-Lucasa:
Wszystkie miejsca zazrowe pochodnej wielomianu $P(z)$ należą do otoczki wypukłej miejsc zerowych wielomianu $P(z)$.

34. Udowodnić Twierdzenie Enestroma:
Niech $P(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z_n$, gdzie $n \geq 1$ i $a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n > 0$. Wtedy zera wialomianu $P(z)$ spełniają $|z| \geq 1$

35. Zbadać zbiór punktów $\{z \mid A|z|^2 - \overline{B}z - B\overline{z} + C = 0\}$ gdzie $A \neq 0$, A, C są rzeczywiste i $|B|^2 > AC$.

36. Przedstwaić *homografię*

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

gdzie $ad - bc \neq 0$ w postaci superpozycji przekształceń liniowych (*homotetii* $g(z) = ez + h$) i odwrotności $(1/z)$

37. Niech

$$GL_2(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc \neq 0 \right\}$$

oraz

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} z = \frac{az+b}{cz+d}$$

Pokaż, że dla $M, N \in GL_2(\mathbb{C})$ zachodzi $M(Nz) = (MN)z$. Wywnioskować wzór na przekształcenie odwrotne do $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$

38. Wykazać, że każdą homografię z dwoma różnymi punktami niezmiennymi α oraz β można zapisać w postaci

$$\frac{f(z)-\alpha}{f(z)-\beta} = A\frac{z-\alpha}{z-\beta}$$

39. Wykazać, że homografia z jednym punktem niezmienniczym ∞ redukuje się do przesunięcia. Dowieść, że homografię z jednym punktem niezmiennym α można zapisać w postaci

$$\frac{1}{f(z)-\alpha} = \frac{1}{z-\alpha} + h$$

40. Dany ciąg $\{z_n\}$ określamy rekurencyjnie: z_0 jest dane, $z_{n+1} = f(z_n)$ przy czym f jest homografią bądź z jednym, bądź z dwoma punktami niezmiennymi. Zbadać zbieżność ciągu $\{z_n\}$

41. Znaleźć punkty skupienia ciągu: $z_0 = 0$, $z_{n+1} = \frac{z_n + i}{z_n - i}$

42. Dowieść, że homografia zachowuje kąty pomiędzy krzywymi.